

# 軌道の動力学的強度について

正員 小野 一 良\*

## DYNAMICAL STRESSES AND STRAINS IN RAILS AND IN OTHER TRACK MATERIALS

*Kazuyoshi Ono, C. E. Member*

**Synopsis** The dynamical deflection of the rail and the dynamical stresses under the action of the moving wheels may become much larger than those calculated on the basis of the static formula. There are various causes which may produce such an increase in deflection and stress, some of which are discussed in three groups, a, b and c.

(a) Variation in the forces acting on the rail caused by variable spring forces on the wheel; the vertical component of the centrifugal force of the counterweights and the vertical component of the forces in the connecting rods.

(b) Different kinds of irregularities in the shape of the wheel or rail, such as flat spots on the rim, low spots on the rail and discontinuities at the rail joints.

(c) Inertia force and internal friction of the track materials and the road bed accompanying with their vertical motion under moving loads. In discussing the causes mentioned in (a) it should be noted that their effect on the deflections and stresses in the rails can be calculated without substantial error in a statical way.

In this paper a method is developed for calculating the increase in deflections and stresses produced by the causes mentioned in (c).

### 目 次

#### 第1篇 走行荷重に依る軌道の撓み運動

1. 緒 言
2. 軌道上部の質量がレールに集中する場合
3. 深さ有限の弾性築堤上にある長さ無限の梁
4. 実験値と計算値との比較
5. 深さ無限の弾性築堤上にある長さ無限の梁
6. 結 論

#### 1. 緒 言

静荷重に依つて軌道の各部分に生ずる応力及び変形の計算方法に関しては略完全な理論があり、実測にも一致している。然るに動荷重の場合には次の各種の原因に依つて軌道に生ずる応力及び変形が増減する。

(a) 車輛の動揺に伴うバネの伸縮、機関車の釣合錘の一部（前後の往復運動をなす質量に釣合わせるためつけた部分）に依る遠心力、主連棒に加わる力の垂直分力。

(b) 車輪踏面及びレール面にある不整（レールの継目を含む）に依つて生ずる衝撃。

(c) 軌道及び路盤の撓み運動に於ける軌道及び路盤自身の慣性の影響；軌道及び路盤の変形に伴う内部摩擦の影響。

従来はこれ等すべての影響を総括して衝撃と称し、衝撃の大きさは静荷重の大きさ及び列車速度に比例すると見做して計算した。然し軌道の動力学的強度を検討するにはこれ等各種の原因に依る影響を分けて研究する要がある。

(a) の原因に依る影響は力の変動する周期が車輛及び軌道の振動に比し比較的長いのでこれを静荷重として計算しても殆ど誤りはない。本書に於ては主として (c) の原因に依る影響を論ずることとし、(b) の原因に依る影響については第2篇に論ずる予定である。

従来 (c) の影響を考慮に入れて計算する方法が2, 3発表せられており<sup>\*</sup>、これ等の論文はすべて次の仮定を設けており、この仮定に依る計算方法を第2章に示す。

(i) 上下動をなす軌道（レール、枕木及び一部の道床砂利）の質量が全部レールに集中すると仮定し、弾性床自身は質量を持たないとする。

\* 日本国有鉄道 鉄道技術研究所

(ii) 軌道の上下運動に伴う軌道の摩擦抵抗力は運動の速度に比例する。

然るに動荷重に依つて上下運動をなすのはレール、枕木だけでなく、その質量から見て道床及び路盤が大きな部分を占め、又これ等はレールと共に上下動をなすとは限らず、又その撓み量も下に行く程小さくなる筈である。従つて全部の質量がレールに集中すると仮定することは適当でない。

軌道の摩擦抵抗力を撓み運動の速度に比例すると見ることは流体内に固体が運動する場合から類推したものと思われるが、軌道の摩擦抵抗力は蓋ろ変形の数に比例すると見るべきである。

以上の欠点があるため第2章の計算式は動荷重に依る軌道の撓み運動を研究するのに不充分であり、著者は第3章以下に弾性床自身の慣性及び変形に対する抵抗力を考慮に入れた場合の弾性床にある梁の撓み運動の計算方法を述べ実測値と対照することとした。

要するに従来1次元で考えられていた軌道の撓み運動を二次元に発展させたものであり、これに依つて1次元では説明出来なかつた種々の事実を説明することが出来、走行荷重に対する軌道の性質を明かになし得た。

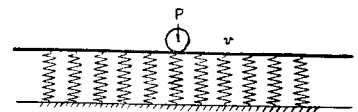
2. 軌道上部の質量がレールに集中する場合

前章に述べた仮定 (i), (ii) を使えばレールの撓み運動に関して次の式が成立つ。

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + R \frac{\partial y}{\partial t} + Ky = 0 \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

上式において  $E$  はレールのヤング係数、 $J$  はレールの断面2次モーメント、 $m$  はレールに集中すると仮定したレール、枕木及び道床上部の単位長さ当りの質量とする。 $R$  はレールの撓み運動の単位速度に対する軌道単位長さ当りの摩擦抵抗力 (kgsec/cm<sup>2</sup>) であり、 $K$  は弾性床の単位撓み量に対する軌道単位長さ当りの反力 (kg/cm<sup>2</sup>) であり、以後弾性床の基礎係数と称する。 $x$  は荷重の進む方向を正とし、 $y$  はレールの撓み量で下方向を正とする。 $t$  は時間(秒)、 $g$  は重力の加速度とする。

図-2.1



(2.1) 式は空間に固定した座標に於ける式であるが、荷重の走行速度  $v$  (cm/sec) を一定と考えて荷重と共に移動する座標に書き換えることとする。即ち  $x = s + vt$  と置き、然る後運動の状態が定常的であると仮定して  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$  とする。この時  $y$  は  $s$  のみの函数となり、(2.1) 式は次の如くなる。

$$EJ \frac{d^4 y}{ds^4} + \frac{m}{g} v^2 \frac{d^2 y}{ds^2} - Rv \frac{dy}{ds} + Ky = 0 \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

この微分方程式を解くに当り次の諸条件を考慮する。

- (a)  $s \leq 0$  に於て  $y = y_1$  とし、 $s \rightarrow -\infty$  に於て  $y_1 \neq \infty$
- (b)  $s \geq 0$  に於て  $y = y_2$  とし、 $s \rightarrow \infty$  に於て  $y_2 \neq \infty$
- (c)  $s = 0$  :  $y_1 = y_2, y_1' = y_2', y_1'' = y_2'' \quad \dots\dots\dots(2.3)$
- (d)  $s = 0$  の位置に荷重  $P$ (kg) があるとして

$$s = 0 : EJy_1''' + P = EJy_2''' \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

然る時は

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \exp(\alpha s)(A \cos \beta_1 s + B_1 \sin \beta_1 s) \\ y_2 &= \exp(-\alpha s)(A \cos \beta_2 s + B_2 \sin \beta_2 s) \end{aligned} \right\}^{*2} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

但し  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  は次式に依つて計算される正の実数であり、 $A, B_1, B_2$  は (2.7) 式に依つて計算される。

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 \left\{ \left( \alpha^2 + \frac{m^2}{4EJg} \right)^2 - \frac{K}{4EJ} \right\} &= \frac{1}{4} \left( \frac{Rv}{4EJ} \right)^2 \\ \beta_1^2 &= \alpha^2 + 2 \frac{m^2}{4EJg} - \frac{Rv}{4EJ} \frac{1}{\alpha} \\ \beta_2^2 &= \alpha^2 + 2 \frac{m^2}{4EJg} + \frac{Rv}{4EJ} \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{P}{EJ} \cdot \frac{\alpha}{8\alpha^2 \left( \alpha^2 + \frac{m^2}{4EJg} \right) + \left( \frac{Rv}{4EJ} \frac{1}{\alpha} \right)^2} \\ B_1 &= -\frac{P}{EJ} \cdot \frac{\alpha^2 + \frac{1}{2} \frac{Rv}{4EJ} \frac{1}{\alpha}}{\beta_1 \left\{ 8\alpha^2 \left( \alpha^2 + \frac{m^2}{4EJg} \right) + \left( \frac{Rv}{4EJg} \frac{1}{\alpha} \right)^2 \right\}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

$$B_2 = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{a^2 - \frac{1}{2} \frac{Rv}{4EJ} \frac{1}{\alpha}}{\beta_2 \left\{ 8\alpha^2 \left( \alpha^2 + \frac{m^2}{4EJg} \right) + \left( \frac{Rv}{4EJ} \frac{1}{\alpha} \right)^2 \right\}}$$

上式に示すように一般に荷重の前方に於けるレールの撓み曲線と荷重の後方に於けるものは形が異つている。荷重の速度が特に大きくない時には一般に次の関係がある。

$$\frac{m^2}{4EJg\kappa^2} \ll 1, \quad \frac{Rv\kappa}{K_1} \ll 1 \quad \text{但し} \quad \kappa = \sqrt[4]{\frac{K}{4EJ}} \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

この時は  $s=0$  に於けるレールの撓み量  $y_0$ 、レール面の傾斜角  $\theta_0$ 、レールに生ずる曲げモーメント  $M_0$  は次に依つて計算される。

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \frac{P}{8EJ\kappa^3} \left\{ 1 + \frac{1}{8EJ\kappa^2} \left( \frac{m}{g} - \frac{5R^2}{8K} \right) v^2 \right\} \\ \tan\theta_0 &= \frac{PRv}{16EJ\kappa K} \\ M_0 &= \frac{P}{4\kappa} \left\{ 1 + \frac{1}{8EJ\kappa^2} \left( \frac{m}{g} - \frac{3R^2}{8K} \right) v^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.9)$$

上式より見られるように  $s=0$  に於けるレール面の傾斜角は 0 とはならず、レールの最大撓み量を生ずる位置は走行荷重の少し後方にある。この撓み量を  $y_{max}$  とすれば

$$y_{max} = \frac{P}{8EJ\kappa^3} \left\{ 1 + \frac{1}{8EJ\kappa^2} \left( \frac{m}{g} - \frac{R^2}{2K} \right) v^2 \right\} \dots\dots\dots(2.10)$$

(2.9), (2.10) 式より見られるように  $y_0, y_{max}, M_0$  はレール、枕木等の慣性に依つて増加し、摩擦抵抗力の存在に依つて減少する。 $s=0$  に於てレール面に傾斜角があるため走行荷重はこの傾斜角に相応した走行抵抗を受け、軌道の単位長さを進むのに  $gP \tan\theta_0$  kg cm<sup>2</sup>/sec<sup>2</sup> だけの仕事をなす。この仕事は摩擦抵抗力のため費されるのである。

特に  $R=0$  と置けば  $\beta_1 = \beta_2, -B_1 = B_2$  となる。従つて (2.5) 式に示すレールの撓み曲線は荷重の前後に於て対称となり、 $\tan\theta_0 = 0$  となる。

次に  $R=0$  とし、慣性の影響を 50kg レール敷設の線路について計算する。 $J=1744\text{cm}^4, K=390\text{kg/cm}^2$  とし、 $m$  としてはレール、枕木及び道床砂利上部の質量を考慮し 6kg/cm とする。(2.8) 式に依れば  $\kappa=0.0128$  となり、(2.9) 式に依ればレールの撓み量及び曲げモーメントの速度に依る増加率は表-1 の如くなる。

即ち速度 100km/h では撓み量、曲げモーメント共に静荷重の 1% 増しであり、殆ど問題にならない。

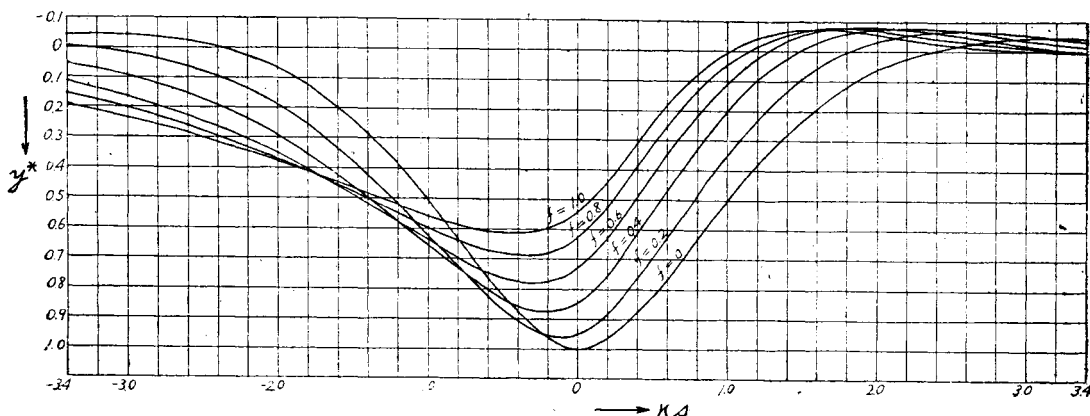
表-1

速 度	50 km/h	100km/h	200km/h
$\frac{1}{8EJ\kappa^2} \cdot \frac{m}{g} v^2$	0.0025	0.0099	0.0396

次に  $m=0$  と置いて摩擦抵抗力の影響のみを調べることにする。(2.5), (2.6), (2.7) 式に於て

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{K}{4EJ}}, \quad f = \frac{Rv}{8EJ\kappa^3}, \quad y = \frac{P}{8EJ\kappa^3} y^* \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

図-2.2

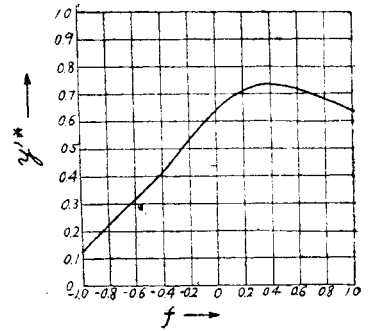


と置いて種々の  $f$  の値に対して  $\kappa s$  と  $y^*$  との関係計算すれば 図-2.2 の如くなる。 $f$  の値が大きくなるに従い荷重の前方に於ける撓み曲線の勾配は急になり、荷重の後方の勾配は緩やかになつている。これ等の最急勾配を

$$\left| \frac{dy}{ds} \right|_{\max} = \frac{P}{8EJ\kappa^2} y'^* \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

と置いて  $f$  と  $y'^*$  との関係を描けば 図-2.3 の如くなる。図-2.3 に於て  $f > 0$  の部分は荷重の前方に於ける最急勾配を示し、 $f < 0$  の部分は荷重の後方に於ける最急勾配を示す。

図-2.3



3. 深さ有限の弾性築堤上にある長さ無限の梁

第2章では軌道及び路盤の質量が1平面上に集中すると仮定して走行荷重に依る軌道の撓み運動を論じたのであるが、実際は荷重の通過に伴つて生ずる上下運動が路盤の表面から内部に伝播するのであつて、質量が集中すると仮定した場合に比較して運動の様相が非常に異なるであろうことは想像に難くない。

次に軌道を弾性体の築堤上にある長さ無限の梁として走行荷重に依る運動の状態を明かにする。レール、枕木等の質量も弾性体の質量の一部を構成していると考え、築堤の高さを  $h$  とし、築堤の幅  $2b$  は深さ  $z$  の増すに従い次式に示す形に増すこととする。

$$2b = 2b_0 \exp(2\psi z) \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

こゝに  $2b_0$  は深さ 0 における路盤の幅とする。築堤以外の線路に於ても軌道上部の圧力は深さの増すに伴い広く路盤に分布するので上式を適用し得る。路盤下層に堅い地盤がある時はそれまでの深さを  $[h]$  とし、全部が均等な地層であれば  $h$  を  $\infty$  とする。但し  $h$  が  $\infty$  となる時の計算方法は第5章に示す。

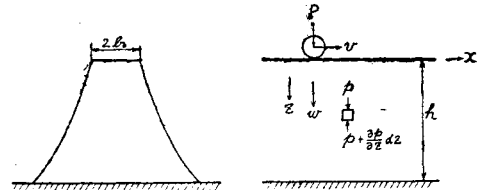


図-3.1

路盤を構成する地層は圧縮と剪断に対して抵抗を持つのであるが、実験結果に依れば剪断に対する抵抗力は無視して差支えないので、圧縮に対する抵抗力のみを考慮することとする。

弾性体の単位体積当りの質量を  $\rho(\text{kg/cm}^3)$  とし、圧縮に対する弾性係数を  $k(\text{kg/cm}^2)$  とする。 $k$  は材料のヤング係数  $E'$  ポアソン比  $\sigma$  と次の関係にある。

$$k = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} E' \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

路盤の内部摩擦は変形の数値に比例するとし、比例の常数を  $\gamma(\text{kgsec/cm}^2)$  とする。

路盤内の圧力を  $p(\text{kg/cm}^2)$  とし、 $z$  軸を軌条面から下方に採る。又路盤内の  $(x, z)$  に於ける撓み量を  $w$  とする。然る時は

$$p = -k \frac{\partial w}{\partial z} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

又路盤の幅の方向に於ける圧力を一定と仮定すれば、

$$b\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -g \frac{\partial}{\partial z} (bp) \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

上式の  $w$  は空間に固定した座標に依る式であるが、荷重の速度  $v$  を一定とし、 $x = s + vt$  と置いて  $w$  を荷重と共に動く座標に書き換えることとする。軌道及び路盤の撓み運動が定常状態に達したとすれば、(3.3), (3.4) 式に於ける  $\frac{\partial w}{\partial t}$  は  $-v \frac{\partial w}{\partial s}$  を以て置き換えられ、従つて

$$p = -k \frac{\partial w}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial z} \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

$$b\rho v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = -g \frac{\partial}{\partial z} (bp) \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

(3.6) 式の  $b$  及び  $p$  に (3.1) 及び (3.5) 式を代入すれば

$$\rho v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = gk \left( 2\psi \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \gamma v \left( 2\psi \frac{\partial w}{\partial s \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial z^2} \right) \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

上式を解くために

$$w = \exp(\lambda s + \mu z) \dots\dots\dots(3.8)$$

と置けば

$$\rho v^2 \lambda^2 = g(k - \gamma v \lambda)(2\psi \mu + \mu^2) \dots\dots\dots(3.9)$$

上式を解けば1個の  $\lambda$  に対し2個の  $\mu$  が得られ、これを  $\mu_1, \mu_2$  とする。即ち

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= -\psi + \sqrt{\psi^2 + \frac{\rho v^2 \lambda^2}{g(k - \gamma v \lambda)}} \\ \mu_2 &= -\psi - \sqrt{\psi^2 + \frac{\rho v^2 \lambda^2}{g(k - \gamma v \lambda)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.10)$$

これ等の  $\mu$  の値を (3.8) 式に入れ、 $C_1, C_2$  を任意常数とすれば

$$w = C_1 \exp(\lambda s + \mu_1 z) + C_2 \exp(\lambda s + \mu_2 z) \dots\dots\dots(3.11)$$

$z=0$  に於てはレールの撓み量と路盤の反力との間に次の関係が成立つ要がある。

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + b_0 p = 0 \dots\dots\dots(3.12)$$

上式の  $p$  に (3.5) 式を入れ、 $w$  に (3.11) 式を入れれば、

$$C_1(EJ\lambda^4 - b_0 k \mu_1 + b_0 \gamma v \lambda \mu_1) + C_2(EJ\lambda^4 - b_0 k \mu_2 + b_0 \gamma v \lambda \mu_2) = 0 \dots\dots\dots(3.13)$$

又 (3.11) 式に依る  $w$  は  $z=h$  に於て 0 となる要がある。このためには

$$C_1 = -C \exp(-\mu_1 h), \quad C_2 = C \exp(-\mu_2 h) \dots\dots\dots(3.14)$$

(3.14) 式を (3.13) 式に入れると  $\lambda$  を求める式が得られる。

$$EJ\lambda^4 = -b_0(k - \gamma v \lambda) \left\{ \psi + \frac{\sqrt{\psi^2 + \frac{\rho v^2 \lambda^2}{g(k - \gamma v \lambda)}}}{\tanh h \sqrt{\psi^2 + \frac{\rho v^2 \lambda^2}{g(k - \gamma v \lambda)}}} \right\} \dots\dots\dots(3.15)$$

上式に於て特に  $v=0$  とすれば

$$EJ\lambda^4 = -\psi b_0 k(1 + \coth \psi h) \dots\dots\dots(3.16)$$

これより弾性床の基礎係数  $K$  は  $\psi b_0 k(1 + \coth \psi h)$  となることが判る。この時は荷重  $P(\text{kg})$  の下に於けるレール面の撓み量  $w_{st}$  及びレールに生ずる曲げモーメントは次式に依りあらわされる。

$$w_{st} = \frac{P}{8EJ\kappa^3}, \quad M_{st} = \frac{P}{4\kappa} \dots\dots\dots(3.17)$$

但し

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{\psi b_0 k(1 + \coth \psi h)}{4EJ}} \dots\dots\dots(3.18)$$

$v \neq 0$  の時は  $\lambda$  の第1近似値を  $(1 \pm i)\kappa$  又は  $(-1 \pm i)\kappa$  として、これ等を (3.15) 式の右辺に入れて漸次正確な  $\lambda$  の値が得られる。このようにして得た  $\lambda_n^2$  の値を  $\alpha_1 \pm i\beta_1$  又は  $-\alpha_2 \pm i\beta_2$  とすれば  $\alpha_1, \alpha_2$  は共に正の実数となる。この  $\lambda$  の値を (3.10) 式の右辺に入れれば  $\mu_1, \mu_2$  が求められるが

$$\left. \begin{aligned} \lambda = \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad \text{に対し} \quad & \left\{ \begin{aligned} \mu_1 &= -\psi + \frac{1}{h}(\sigma_1 \pm i\tau_1) \\ \mu_2 &= -\psi - \frac{1}{h}(\sigma_2 \pm i\tau_1) \end{aligned} \right. \\ \lambda = -\alpha_2 \pm i\beta_2 \quad \text{に対し} \quad & \left\{ \begin{aligned} \mu_1 &= -\psi + \frac{1}{h}(\sigma_2 \mp i\tau_2) \\ \mu_2 &= -\psi - \frac{1}{h}(\sigma_2 \mp i\tau_2) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.19)$$

と書きあらわす。

$v \neq 0$  の時 (3.15) 式を満す  $\lambda$  の根は上記の4個に限らず更に無限に多数ある。これ等の根を求めるには

$$\left. \begin{aligned} h \sqrt{\psi^2 + \frac{\rho v^2 \lambda^2}{g(k - \gamma v \lambda)}} = i(n\pi + \varepsilon_n) \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.20)$$

と置いて (3.15) 式を変形すれば

$$\tan \varepsilon_n = \frac{b(\gamma v \lambda - k)(n\pi + \varepsilon_n)}{h\{EJ\lambda^4 - \psi b(\gamma v \lambda - k)\}} \dots\dots\dots(3.21)$$

となり、 $\epsilon_n$  の第1近似値を0とおいて(3.20)式より $\lambda$ の第1近似値を求め、次に $\epsilon_n, \lambda$ の第1近似値を(3.21)式の右辺に入れて $\epsilon_n$ の第2近似値を求める。このようにして順次に正確な $\lambda$ の値が定まるが、これ等の $\lambda$ は常に正の実数倍を持つ複素数となるか、或いは正の実数となる。これを $\alpha_{1n} \pm i\beta_{1n}$  (但し  $n=1, 2, \dots$ ) とし(3.10)式に依り

$$\lambda = \alpha_{1n} \pm i\beta_{1n} \text{ に対し } \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = -\psi + \frac{1}{h}(\sigma_{1n} \pm i\tau_{1n}) \\ \mu_2 = -\psi - \frac{1}{h}(\sigma_{1n} \pm i\tau_{1n}) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(3.22)$$

とする。このようにして求めた多数の $\lambda, \mu_1, \mu_2$ を(3.11)式に入れると $w$ の一般解が求められるが、この中で次の条件を満す解を選ぶこととする。即ち

$$s \leq 0 \text{ に於て } w = w_1 \text{ とし, } s \rightarrow -\infty \text{ に於て } w_1 \neq \infty$$

$$s \geq 0 \text{ に於て } w = w_2 \text{ とし, } s \rightarrow \infty \text{ に於て } w_2 \neq \infty$$

とする。然る時は

$$w_1 = -\sum \exp\left(\alpha_j s - \psi z - \sigma_j \frac{h-z}{h}\right) \left\{ A_j \cos\left(\beta_j s - \tau_j \frac{h-z}{h}\right) + B_j \sin\left(\beta_j s - \tau_j \frac{h-z}{h}\right) \right\} \\ + \sum \exp\left(\alpha_j s - \psi z + \sigma_j \frac{h-z}{h}\right) \left\{ A_j \cos\left(\beta_j s + \tau_j \frac{h-z}{h}\right) + B_j \sin\left(\beta_j s + \tau_j \frac{h-z}{h}\right) \right\} \\ \text{但し } j=1, 11, 12, 13, \dots\dots\dots(3.23)$$

$$w_2 = -\exp\left(-\alpha_2 s - \psi z - \sigma_2 \frac{h-z}{h}\right) \left\{ A_2 \cos\left(\beta_2 s + \tau_2 \frac{h-z}{h}\right) + B_2 \sin\left(\beta_2 s + \tau_2 \frac{h-z}{h}\right) \right\} \\ + \exp\left(-\alpha_2 s - \psi z + \sigma_2 \frac{h-z}{h}\right) \left\{ A_2 \cos\left(\beta_2 s - \tau_2 \frac{h-z}{h}\right) + B_2 \sin\left(\beta_2 s - \tau_2 \frac{h-z}{h}\right) \right\}$$

上式の $A_j, B_j, A_2, B_2$ は任意常数であるが次の境界条件に依つて決定される。

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad s=0: w_1 = w_2 \\ (b) \quad s=0: \frac{\partial w_1}{\partial s} = \frac{\partial w_2}{\partial s} \\ (c) \quad s=0, z=0: \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial s^2} \\ (d) \quad s=0, z=0: \frac{\partial^3 w_1}{\partial s^3} + \frac{P}{EJ} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial s^3} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(3.24)$$

然しこの計算は一般に甚だ煩雑なるため、次に弾性体の慣性に依る影響と摩擦抵抗の影響とを別々に取出して吟味することとする。

(i) 慣性に依る影響

$\gamma \rightarrow 0$  とすれば  $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \sigma_1 = \sigma_2, \tau_1 = \tau_2$  となり、これ等を $\alpha, \beta, \sigma, \tau$ と置く。又 $\alpha_{1n} = 0, \sigma_{12} = 0$  (但し  $n=1, 2, 3, \dots$ ) となる。これ等の関係を(3.23)式に入れ、且(a), (c)の条件を考慮すれば(3.23)式の常数は次の関係を満す要がある。

$$A_1 = A_2 (=A \text{ と置く,}) \quad -B_1 = B_2 (=B \text{ と置く,}) \quad B_{1n} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

以上の諸式を用いて(3.23)式を書き直せば

$$w_1 = -\exp\left(\alpha s - \psi z - \sigma \frac{h-z}{h}\right) \left\{ A \cos\left(\beta s - \tau \frac{h-z}{h}\right) - B \sin\left(\beta s - \tau \frac{h-z}{h}\right) \right\} \\ + \exp\left(\alpha s - \psi z + \sigma \frac{h-z}{h}\right) \left\{ A \cos\left(\beta s + \tau \frac{h-z}{h}\right) - B \sin\left(\beta s + \tau \frac{h-z}{h}\right) \right\} \\ - 2 \sum_n A_{1n} \exp(-\psi z) \sin \beta_{1n} s \sin \tau_{1n} \frac{h-z}{h} \\ w_2 = -\exp\left(-\alpha s - \psi z - \sigma \frac{h-z}{h}\right) \left\{ A \cos\left(\beta s + \tau \frac{h-z}{h}\right) + B \sin\left(\beta s + \tau \frac{h-z}{h}\right) \right\} \\ + \exp\left(-\alpha s - \psi z + \sigma \frac{h-z}{h}\right) \left\{ A \cos\left(\beta s - \tau \frac{h-z}{h}\right) + B \sin\left(\beta s - \tau \frac{h-z}{h}\right) \right\} \dots\dots\dots(3.25)$$

第2章の計算においては $R \rightarrow 0$ とした時荷重の前後に於ける撓み曲線は対称となつたのであるが、軌道及び路盤の質量が分布している時は(3.25)式に示す如く一般に荷重の前後に於ける撓み量は対称とはならない。 $w_1$ の

最後の項は  $s \rightarrow -\infty$  においても 0 とはならず、荷重の後方の路盤に振動を残すことを示している。

(3.25) 式に依る  $w_1, w_2$  を (b) の条件に入れれば次式が得られる。

$$2(\alpha A - \beta B) \sinh \sigma \frac{h-z}{h} \cos \tau \frac{h-z}{h} - 2(\beta A + \alpha B) \cosh \sigma \frac{h-z}{h} \sin \tau \frac{h-z}{h} - \sum_n \beta_{1n} A_{1n} \sin \tau_{1n} \frac{h-z}{h} = 0 \quad \dots\dots\dots(3.26)$$

上式に於て特に  $z=0$  と置けば

$$2(\alpha A - \beta B) \sinh \sigma \cos \tau - 2(\beta A + \alpha B) \cosh \sigma \sin \tau - \sum_n \beta_{1n} A_{1n} \sin \tau_{1n} = 0 \quad \dots\dots\dots(3.27)$$

然し (3.26) 式は  $z=0$  だけに限らず  $0 \leq z \leq h$  なる範囲の総ての  $z$  に対して成立する要がある。

今  $\frac{h-z}{h} = \zeta$  とし、更に

$$\sinh \sigma \zeta \cos \tau \zeta = \varphi_1(\zeta), \quad \cosh \sigma \zeta \sin \tau \zeta = \varphi_{11}(\zeta), \quad \sin \tau_{1n} \zeta = \varphi_n(\zeta), \quad n=1, 2, 3, \quad \dots\dots\dots(3.28)$$

と置けば (3.26) 式は

$$2(\alpha A - \beta B) \varphi_1(\zeta) - 2(\beta A + \alpha B) \varphi_{11}(\zeta) - \sum_n \beta_{1n} A_{1n} \varphi_n(\zeta) = 0 \quad \dots\dots\dots(3.29)$$

となる。上式が  $0 \leq \zeta \leq 1$  なる範囲の総ての  $\zeta$  に対して成立するためには次の関係を必要とする。<sup>\*3</sup>

$$\left. \begin{aligned} 2(\alpha A - \beta B)(I, I) - 2(\beta A + \alpha B)(I, II) - \sum_n \beta_{1n} A_{1n}(I, n) &= 0 \\ 2(\alpha A - \beta B)(II, I) - 2(\beta A + \alpha B)(II, II) - \sum_n \beta_{1n} A_{1n}(II, n) &= 0 \\ 2(\alpha A - \beta B)(m, I) - 2(\beta A + \alpha B)(m, II) - \sum_n \beta_{1n} A_{1n}(m, n) &= 0 \\ m=1, 2, 3, \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.30)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } (i, j) &= \int_0^1 \varphi_i(\zeta) \varphi_j(\zeta) d\zeta \\ i, j &= I, II, 1, 2, 3, \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.31)$$

次に (d) の条件に (3.25) 式を入れて計算を進めれば次式を得る。

$$4\alpha\beta(\alpha A - \beta B) \cosh \sigma \sin \tau + 4\alpha\beta(\beta A + \alpha B) \sinh \sigma \cos \tau - \sum_n \beta_{1n} A_{1n} (\beta_{1n}^2 + \alpha^2 - \beta^2) \sin \tau_{1n} = \frac{P}{2EJ} \quad \dots\dots\dots(3.32)$$

結局 (3.27), (3.30), (3.32) 式より  $A, B, A_{11}, A_{12}, \dots\dots\dots$  等の未知数が決定される。

これ等の値を (3.25) 式に入ると走行荷重に従つて軌道及び路盤に生ずる運動をあらわす方が得られる。特に  $s=0, z=0$  に於けるレールの撓み量  $w_0$ , レール面の傾斜角  $\theta_0$ , レールに生ずる曲げモーメント  $M_0$  は次式に依り計算される。

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= 2(A \sinh \sigma \cos \tau - B \cosh \sigma \sin \tau) \\ \tan \theta_0 &= \sum_n A_{1n} \beta_{1n} \sin \tau_{1n} \\ M_0 &= 2EJ \{ (\beta^2 - \alpha^2) (A \sinh \sigma \cos \tau - B \cosh \sigma \sin \tau) + 2\alpha\beta (A \cosh \sigma \sin \tau + B \sinh \sigma \cos \tau) \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.33)$$

上式より見られるように一般に  $s=0$  に於けるレール面の傾斜角は 0 とはならず、従つてレールの最大撓みを生ずる位置は荷重の少し後方にある。この最大撓みを  $w_{max}$  とすればこの概略の大きさは次式に依つて計算される。

$$w_{max} = w_0 + \frac{EJ \tan^2 \theta_0}{2M_0} \quad \dots\dots\dots(3.34)$$

又荷重の下に於けるレール面の傾斜角が 0 とならないため荷重が単位長さを進むには  $gP \tan \theta_0$  なる仕事を必要とする。この仕事は荷重の後方の軌道に変形及び運動のエネルギーとして残される筈である。従つて

$$gP \tan \theta_0 = \lim_{s \rightarrow -\infty} \left\{ \int_0^h \frac{1}{2} b g k \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz + \int_0^h \frac{1}{2} b \rho v^2 \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 dz \right\} \quad \dots\dots\dots(3.35)$$

(3.25) 及び (3.33) 式を用いて上式を計算すれば

$$P \sum_n A_{1n} \beta_{1n} \sin \tau_{1n} = \frac{b_0 k}{h} \sum_n A_{1n}^2 \left\{ \tau_{1n}^2 + \frac{\psi^2 h^2}{2} (\cos 2\tau_{1n}) + \psi^2 h^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\tau_{1n}}{2\tau_{1n}} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(3.36)$$

上式は  $A, B, A_{11}, A_{12}, \dots\dots\dots$  等を計算する時前述の諸式に併用し得る。 $v$  が特に大きくならない限り一般に  $A_{12} \approx 0, A_{13} \approx 0, \dots\dots\dots$  且  $\tau_{11} \approx \pi$  と見做されるから、(3.36) 式より  $A_{11}$  を直接に求める式が得られる。

$$A_{11} \approx \frac{-Ph \beta_{11} \varepsilon_1}{b_0 k (\pi^2 + \psi^2 h^2)} \quad \dots\dots\dots(3.37)$$

上式に依つて  $A_{1n}$  が決まれば  $A, B$  は (3.27) 及び (3.32) 式に依つて簡単に計算し得る。

(3.25) 式の  $w_1$  の右辺の最後の項は走行荷重の後方に残される振動を示すのであるが第  $n$  次振動の振幅は

$$a_n = 2A_{1n} \exp(-\psi z) \sin \tau_{1n} \frac{h-z}{h} \dots\dots\dots (3.38)$$

に依つてあらわされる。 $\tau_{1n}$  が  $n\pi$  に近い数であることに注意すれば (3.38) 式は或る深さで振幅が最大になることを示している。この振動のレール方向に於ける波長  $S_n$ 、深さの方向に於ける波長  $Z_n$  及び振動数  $f_n$  は次式に依つて計算される。

$$S_n = \frac{2\pi}{\beta_{1n}}, Z_n = \frac{2\pi h}{\tau_{1n}}, f_n = \frac{\beta_{1n} v}{2\pi} \dots\dots\dots (3.39)$$

(ii) 摩擦抵抗力の影響

慣性の影響を無視して摩擦抵抗力の影響のみを考慮した場合について計算を進めることとする。このためには (3.6) 式に於て  $p=0$  と置けばよい。然る時は

$$p = p_0 \exp(-2\psi z) \dots\dots\dots (3.40)$$

但し  $p_0$  は  $z=0$  に置ける圧力とする。上式を (3.5) 式に入れ、 $z=h$  に於て  $w=0$  となることを考慮すれば

$$p_0 \{ \exp(-2\psi z) - \exp(-2\psi h) \} = 2\psi \left( kw - \gamma v \frac{\partial w}{\partial s} \right) \dots\dots\dots (3.41)$$

上式の  $z$  を 0 と置いた時の  $p_0$  を (3.12) 式の  $p$  に入れば

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \psi b_0 k (1 + \coth \psi h) \left( kw - \gamma v \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0 \dots\dots\dots (3.42)$$

この式は (2.2) 式に於て  $y$  を  $w$  とし、

$$m = 0, K = \psi b_0 k (1 + \coth \psi h), R = \frac{K\gamma}{k} \dots\dots\dots (3.43)$$

と置いた場合に全く等しい。従つて (2.6) 及び (2.7) 式に依り、 $\alpha, \beta_1, \beta_2, A, B_1, B_2$  を求めれば  $z=0$  に於けるレールの撓み曲線が得られる。又 (3.41) 式に依り  $w$  と  $z$  との関係が得られるのでこれ等を併せ考慮して次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{\exp(-2\psi z) - \exp(-2\psi h)}{1 - \exp(-2\psi h)} \exp(\alpha s) (A \cos \beta_1 s + B_1 \sin \beta_1 s) \\ w_2 &= \frac{\exp(-2\psi z) - \exp(-2\psi h)}{1 - \exp(-2\psi h)} \exp(-\alpha s) (A \cos \beta_2 s + B_2 \sin \beta_2 s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.44)$$

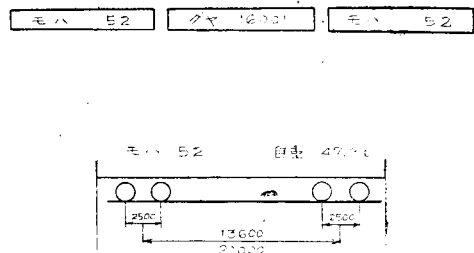
以上の計算に依れば路盤の質量を無視した場合に限り、路盤内の変形に比例する摩擦抵抗力が作用するとしても、又レールの撓み運動の速度に比例する摩擦抵抗力が作用するとしてもその結果は同一となつた。

4. 実験値と計算値との比較

(i) 軌道材料及び路盤の慣性の影響

東海道線三島沼津間に於て 図-4.1 に示す編成の電車の試運転を行った時にレール又は枕木の撓み量を測定し且路盤に生ずる振動を測定した。撓み量測定には撓度計を用いて撓み量を 3~5 倍に拡大して記録し、路盤の振動測定には石本式振動計を枕木間の道床面に据付けた。この振動計の固有周期は 0.08 秒である。レール重量 50kg/m、枕木間隔 67cm、碎石道床、築堤の高さ約 4m であつた。

図-4.1



レール及び枕木の撓み量と速度との関係を 図-4.2 に示し、石本式振動計に依つて測定した地盤振動の振動数を 図-4.3 に示し、最大振幅を 図-4.4 に示した。図-4.2 に示す撓み量はモハ 2 輛の各車輪が通過する時の撓み量を 1 列車毎に平均した数字である。この図に依ればレールの撓み量と枕木の撓み量との間に約 1mm の差があるが、これは撓度計取付位置のレールと枕木との間に約 1mm の隙間があるためと解釈される。

今レール支承体沈下係数を  $D=24,000 \text{ kg/cm}$  としてモハの各車輪(輪重 6,000kg)に依つて生ずるレールの撓み量を計算すれば  $v_{st}=0.1045 \text{ cm}$  となり、これに隣接の車輪の影響を加えれば 0.100cm となる。この値は 図-4.2 の枕木の撓み量(速度の低い場合)に一致している。枕木の寸法を  $210 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 14 \text{ cm}$  とすれ



図-4.2

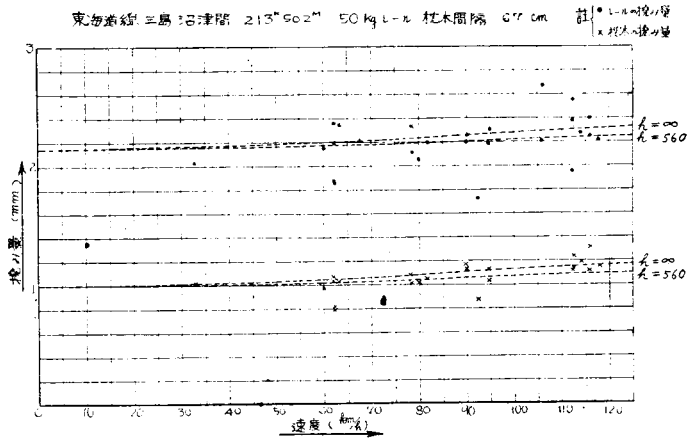


図-4.3

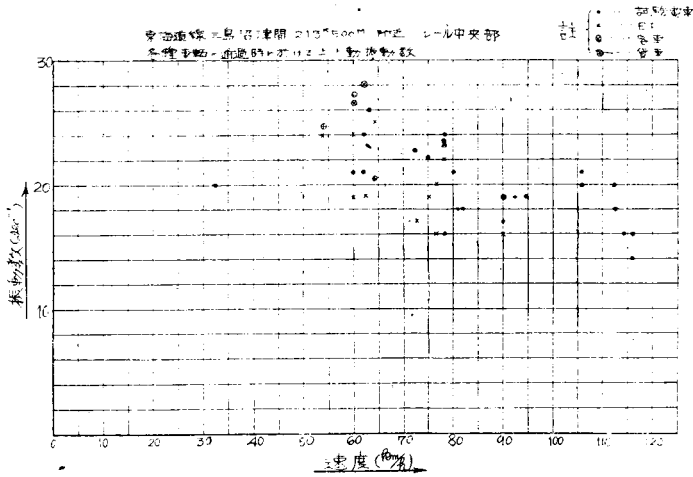
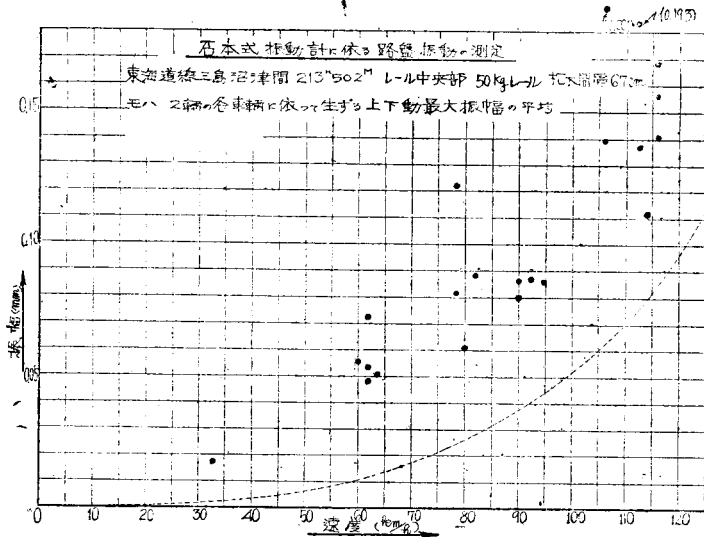


図-4.4



ば  $D=24,000 \text{ kg/cm}$  に対して道床係数は  $C=13 \text{ kg/cm}^3$  となる。ブーシネスクの弾性論を用いれば底面積が  $210 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$  の枕木で測定した道床係数と地盤のヤング係数  $E'(\text{kg/cm}^2)$  との間には次の関係が導かれる。

$$C = \frac{E'}{45.7(1-\sigma^2)}$$

上式に於ける  $\sigma$  はポアソン比である。今  $\sigma=0.3$  として上式より  $E'$  を求めれば  $E'=540 \text{ kg/cm}^2$  となる。又 (3.2) 式に依つて圧縮に対する弾性係数を求めれば  $k=727 \text{ kg/cm}^2$  となる。道床及び路盤の密度を平均して 1.7 とすれば  $\rho=0.0017$  となる。

(3.1) 式に於ける  $b_0$  を  $120 \text{ cm}$  とし、 $\psi$  を  $0.002 \text{ cm}^{-1}$  とし、 $h=560 \text{ m}$  とすれば、 $K=\psi b_0 k (1+\coth \psi h)=390 \text{ kg/cm}^2$  となる。(3.18)式より  $\kappa=0.01278$ 、荷重の速度を  $100 \text{ km/h}$  とすれば  $v=2780 \text{ cm/sec}$  となる。 $\gamma=0$  として (3.15) 式より  $\lambda=\alpha \pm i\beta$  を求めれば  $\alpha=0.01213$ 、 $\beta=0.01357$  となり、(3.10)式に依つて  $\mu=-\psi + \frac{1}{h}(\sigma \pm i\tau)$  を求めれば  $\sigma=1.267$ 、 $\tau=0.751$  を得る。(3.20)、(3.21) 式に依り  $\epsilon_1=-0.0366$ 、 $\alpha_{11}=0$ 、 $\beta_{11}=0.0434$ 、 $\sigma_{11}=0$ 、 $\tau_{11}=3.1050$ 、(3.37) 式に依り  $A_{11}=0.0571 w_{st}$ 、(3.27) 及び (3.32) 式に依り  $\alpha A - \beta B = 0.00541 w_{st}$ 、 $\beta A + \alpha B = 0.00491 w_{st}$ 、従つて  $A=0.399 w_{st}$ 、 $B=-0.0417 w_{st}$ 、(3.33) 式に依れば  $v_0=1.06 w_{st}$ 、 $\tan \theta_0 = 0.00711 \kappa w_{st}^{*4}$ 、 $M_0=1.071 M_{st}$  を得る。又 (3.34) 式に依つて計算すれば  $w_{max}$  は  $w_0$  と差がない。以上の計算に依れば速度  $100 \text{ km/h}$  の動荷重に依るレールの撓み量及び曲げモーメントは静荷重の場合の 6~7% 増しとなり、第2章に依る計算に較べて甚だ大きい。(3.38) 式に依り  $z=100 \text{ cm}$  として第1次振動の振幅を計算すれば  $a_1=0.0521 w_{st}$  となり、又 (3.39) 式に依れば振動数は  $f_1=19.2$  となる。

同様にしてこの他の速度についてもレールの撓み量、傾斜角、曲げモーメント、路盤の振動振幅、振動数を計算すれば表-2 の如くなる。

$w_{st}$  は略  $1 \text{ mm}$  であり、隣接荷重の影響は非常に小さいので表-2 の撓み量及び振幅は  $\text{mm}$  の単位で示されていると見てよい。上表の撓み量及び振幅を図-4.2 及び 4.4 に点線でいれてあるが、撓み量は実験結果に較べて幾分小さい。又計算より得た振幅は測定値に較べて非常に少ないが、測定値は最大振幅を採つたため差を生じたものと解される。表-2 に依れば路盤の振動数は略  $19 \text{ sec}^{-1}$  となり、速度の増加に依つて僅かに減少する。これは実験結果によく一致している。

表-2

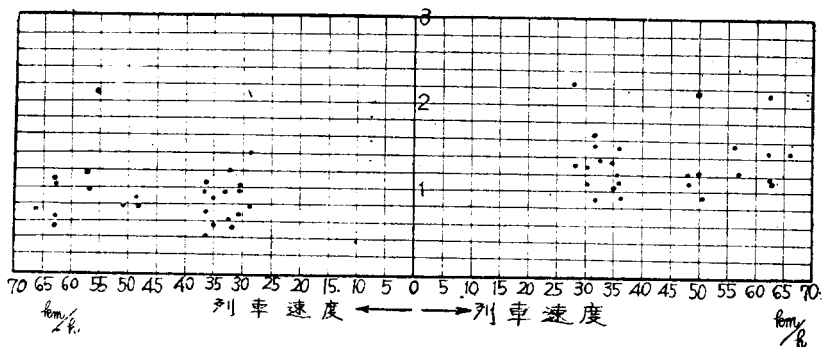
速度	km/h	0	60	100	120
$w_0$	$w_{st}$	1	1.019	1.062	1.083
$\tan \theta_0$	$\kappa w_{st}$	0	0.0003	0.0071	0.0218
$M_0$	$M_{st}$	1	1.021	1.071	1.094
$a_1$	$w_{st}$	0	0.0107	0.0521	0.057
$f_1$	$\text{sec}^{-1}$		19.4	19.2	19.0

(ii) 路盤の変形に対する内部摩擦の影響

第3章で論じたように路盤の内部に変形に比例する摩擦抵抗力がある時は荷重の前方に於けるレールの撓み曲線と後方に於けるものとは異なる。レールの撓み量測定記録に依ればこの影響が明かに認められる場合もあり又全然認められない場合もある。

その1例として東北線白河に於て測定した撓度計記録から荷重の前後に於けるレール面の最急勾配を測り、これを図-4.5 に示す。(2.11)及び(3.43) 式に依り  $f$  は  $v$  に比例するから 図-2.2 に依り速度が大きくなる

図-4-5



程荷重の前後に於ける撓み曲線の勾配の差が大きくなる筈であるが、図-4.5 は速度に依つて殆ど変化のないことを示している。これは  $f$  が  $v$  に関係せず略一定であることを示す。云ひ換えれば路盤内の摩擦抵抗力は変形速度に関係せず略一定である。

この図に依れば荷重の前方に於ける勾配は 1.2 となり、後方では 0.8 となり、その比は 0.5 である。図-2.3 に依ればこれは  $f=0.25$  に相当する。今  $D=18,000 \text{ kg/cm}$ , 枕木間隔 71cm,  $J=952 \text{ cm}^4$ ,  $K=254 \text{ kg/cm}^2$  とすれば  $k=545 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\kappa=0.0133 \text{ cm}^{-1}$  となる。(2.11) 及び (3.43) 式に依り計算すれば、 $\gamma v=20,500 \text{ kg/cm}$  を得る。

今  $P=7500 \text{ kg}$ ,  $b_0=120 \text{ cm}$  として (3.3) 式右辺第 2 項の最大値を計算すれば  $\left[ \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \right]_{\max} = 0.13 \text{ kg/cm}^2$  となり、又第 1 項の最大値は  $k \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{\max} = 0.42 \text{ kg/cm}^2$  となる。即ち内部摩擦に依る最大抵抗力が弾性に依る最大抵抗力の 31% となる。これは摩擦抵抗力が特に大きくあらわれた例であり、一般には非常に小さく、認められない場合も多い。

5. 深さ無限の弾性築堤上にある長さ無限の梁

本章では路盤の深さを無限として軌道及び路盤の撓み運動を論ずることとする。軌道上部の圧力を受ける路盤の幅は (3.1) 式に示すように深さの増すに従い広く採る。このようにすれば  $h \rightarrow \infty$  としても (3.1) から (3.13) 式まではそのまま適用出来る。

(3.8) 式の  $\lambda, \mu$  を求めるに当り  $z \rightarrow \infty$  に於て  $w$  が有限であるべきことは勿論であるが、更に軌道及び路盤の単位長さ当りに含まれる変形及び運動のエネルギーが  $\infty$  となつてはならない。このためには  $\psi + \mu$  の実数部が 0 又は負であることを要する。(3.13) 式より  $\lambda$  と  $\mu$  との関係を求めるには次の 3 種類の場合を考慮する必要がある。

$$\left. \begin{aligned} \text{(甲)}: & C_1 \neq 0, C_2 = 0, EJ\lambda^4 - b_0 k \mu_1 + b_0 \gamma v \lambda \mu_1 = 0 \\ \text{(乙)}: & C_1 = 0, C_2 \neq 0, EJ\lambda^4 - b_0 k \mu_2 + b_0 \gamma v \lambda \mu_2 = 0 \\ \text{(丙)}: & C_1 \neq 0, C_2 \neq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

先づ (甲) 及び (乙) の場合を併せて論ずることとし、(3.9) 及び (5.1) 式より  $\lambda, \mu$  の関係を求めれば

$$\mu = \frac{b_0 \rho v^2}{E J g \lambda^2} - 2\psi \dots\dots\dots (5.2)$$

この  $\mu$  の式を (5.1) 式に入れると

$$EJ\lambda^4 = b_0 \left( \frac{b_0 \rho v^2}{E J g \lambda^2} - 2\psi \right) (k - \gamma v \lambda) \dots\dots\dots (5.3)$$

上式は  $\lambda$  の 6 次式であり、2 個の実数根と 4 個の複素数根がある。この実数根に小しては  $\mu$  が正の実数となり、 $z \rightarrow \infty$  に於て  $w \rightarrow \infty$  となつて不適当である。

$\lambda$  の複素数根を  $\alpha_1 \pm i\beta_1, -\alpha_2 \pm i\beta_2$  とし、これ等の  $\lambda$  を (5.2) 式に入れて求めた  $\mu$  の値をそれぞれ  $-\psi - \sigma_1 \mp i\tau_1, -\psi - \sigma_2 \pm i\tau_2$  とする。 $\sigma_1, \sigma_2$  は正となるので  $\psi + \mu$  の実数部は負となる。これ等の  $\lambda, \mu$  の値を (3.8) に入れれば  $w$  の一般解が求められるがこの中で次の条件を満す解を求める。即ち

$$\begin{aligned} s \leq 0 \text{ に於て } w = w_1 \text{ とし, } s \rightarrow -\infty \text{ に於て } w_1 \neq \infty, \\ s \geq 0 \text{ に於て } w = w_2 \text{ とし, } s \rightarrow \infty \text{ に於て } w_2 \neq \infty \end{aligned}$$

然る時は

$$\left. \begin{aligned} w_1 = \exp(\alpha_1 s - \psi - \sigma_1 z) \{ A_1 \cos(\beta_1 s - \tau_1 z) + B_1 \sin(\beta_1 s - \tau_1 z) \} \\ w_2 = \exp(-\alpha_2 s - \psi - \sigma_2 z) \{ A_2 \cos(\beta_2 s + \tau_2 z) + B_2 \sin(\beta_2 s + \tau_2 z) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.4)$$

次に (丙) の場合を論ずることとし、 $\mu_1 + \psi$  の実数部と  $\mu_2 + \psi$  の実数部が同時に 0 又は負となるためには (3.10) 式の右辺の根号の中即ち  $\psi^2 + \frac{\rho v^2 \lambda^2}{g(k - \gamma v \lambda)}$  が負の実数となることを要する。この条件より  $\lambda$  の採るべき値の範囲が定まるのであるが、次の 2 通りの場合に分けて論ずるのが便利である。

$$\begin{aligned} \text{(丙1)} \quad g\gamma^2 \psi^2 < 4k\rho \\ \text{(丙2)} \quad g\gamma^2 \psi^2 > 4k\rho \end{aligned}$$

先づ (丙1) の場合を解くこととし、 $\lambda = \alpha + i\beta$  とすれば  $\alpha, \beta$  は (丙 1.1) 又は (丙 1.2) の何れかの条件を満さねばならない。

$$\text{(丙 1.1)} \quad \alpha > \frac{k}{\gamma v}, \quad \beta = 0 \dots\dots\dots (5.5)$$

$$\text{(丙 1.2)} \quad \frac{g\gamma^2 \psi^2}{2\rho v} < \alpha < \frac{2k}{\gamma v}, \quad \beta^2 = \alpha \left( \frac{2k}{\gamma v} - \alpha \right) \dots\dots\dots (5.6)$$

(丙2)の場合にも  $\lambda = \alpha + i\beta$  と置けば  $\beta = 0$  となり,  $\alpha$  は或る特定の範囲内にある正の実数となる。  
以上の各程の場合に対し

$$\frac{\rho v^2 \lambda^2}{g(\gamma v \lambda - k)} - \psi^2 = w^2 \dots\dots\dots(5.7)$$

と置けば  $w$  は実数となり,  $\mu_1, \mu_2$  は

$$\mu_1 = -\psi + iw, \quad \mu_2 = -\psi - iw \dots\dots\dots(5.8)$$

を以てあらわされる。

以上の条件を満たす  $\lambda, \mu$  の値を (3.13) 式に入れて  $C_1, C_2$  の値を決めれば

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -Q(\alpha + i\beta)^2(w^2 + \psi^2) + \psi + iw \\ C_2 &= Q(\alpha + i\beta)^2(w^2 + \psi^2) - \psi + iw \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.9)$$

但し  $Q = \frac{EJg}{b_0 \rho v^2}$

この  $C_1, C_2$  を (3.11) 式に入れれば次の2種類の解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} w_{11} &= \exp(\alpha s - \psi z) \{ [Q(\beta^2 - \alpha^2)(w^2 + \psi^2) + \psi] \sin \beta s \sin uz \\ &\quad - 2Q\alpha\beta(w^2 + \psi^2) \cos \beta s \sin uz + w \sin \beta s \cos uz \} \\ w_{12} &= \exp(\alpha s - \psi z) \{ [Q(\beta^2 - \alpha^2)(w^2 + \psi^2) + \psi] \cos \beta s \sin uz \\ &\quad + 2Q\alpha\beta(w^2 + \psi^2) \sin \beta s \sin uz + w \cos \beta s \cos uz \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.10)$$

(丙1.2)の場合には上の2種類の解が共に存在するが, (丙1.1)又は(丙2)の場合には  $\beta = 0$  となるので  $w_{11}$  は存在しない。何れの場合にも  $\alpha$  は常に正の実数となるので  $w_{11}, w_{12}$  は共に  $s \leq 0$  の範囲のみに適用される。又上式に於ける  $\beta, w$  は  $\alpha$  に依つて定まるが  $\alpha$  は指定の範囲内で任意に選び得るので上式に  $\alpha$  の任意の函数  $F_{11}(\alpha), F_{12}(\alpha)$  を乗じて  $\alpha$  に許された範囲内で積分したもの, 即ち

$$\int F_{11}(\alpha) w_{11} d\alpha + \int F_{12}(\alpha) w_{12} d\alpha$$

も亦解となる。この式を (5.4) 式に依る  $w_1$  の右辺に加えれば  $w_1$  の最も一般的な解が得られる。

このようにして  $w_1, w_2$  の一般解が得られた時は, (3.24)式に示された諸条件に依つて (5.4) 式に於ける  $A_1, B_1, A_2, B_2$  及び任意函数  $F_{11}(\alpha), F_{12}(\alpha)$  が決定される。然るにこの計算は一般に甚だ煩雑なるため, 第3章と同様に弾性体の慣性に依る影響と摩擦抵抗の影響とを別々に取出して吟味することとする。

(i) 慣性に依る影響

$\gamma \rightarrow 0$  とした時 (5.3) 及び (5.2) 式より求めた  $\lambda$  及び  $w, \mu$  の値を次の如く書く。

$$\lambda = \pm(\alpha_0 + i\beta_0) \text{ に対し } \mu = -\psi - \sigma - i\tau \quad \lambda = \pm(\alpha_0 - i\beta_0) \text{ に対し } \mu = -\psi - \sigma + i\tau$$

これ等の値を (5.4) 式に入れると (甲) 及び (乙) の場合の解が得られる。

次に (丙) の場合の解を求めるのであるが,  $\gamma \rightarrow 0$  とすれば (丙1) の場合が適用され, この中で (丙1.1) は  $\alpha \rightarrow \infty$  となつて適当でない。(丙1.2)の場合には  $\alpha$  は任意の正の実数として差支えないが,  $\alpha$  の大きさを有限とすれば  $\beta \rightarrow \infty$  となつて適当でない。逆に  $\beta$  を有限の大きさとすれば  $\alpha = 0$  となり, この場合だけが丙の解として使われる。

(5.7) 式に於て  $\gamma \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$  と置けば

$$\beta = \nu \sqrt{w^2 + \psi^2}, \text{ 但し } \nu = \sqrt{\frac{gk}{\rho v^2}} \dots\dots\dots(5.11)$$

(5.10) 式の  $\alpha, \beta$  に上記の値を入れれば  $\gamma \rightarrow 0$  とした時の解が得られるが, この  $w_{11}, w_{12}$  に  $w$  の任意函数  $\Phi(w), \Psi(w)$  を乗じて  $w$  で積分した式も亦解となる。この式を (5.4) 式の  $w_1$  の右辺に加えれば  $w_1, w_2$  の一般解として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \exp(\alpha_0 s - \psi z - \sigma z) \{ A_1 \cos(\beta_0 s - \tau z) + B_1 \sin(\beta_0 s - \tau z) \} \\ &\quad + \exp(-\psi z) \int_0^\infty \{ \Phi(w) \sin \sqrt{w^2 + \psi^2} \nu s + \Psi(w) \cos \sqrt{w^2 + \psi^2} \nu s \} \\ &\quad \times \{ [V(w^2 + \psi^2)^2 + \psi] \sin uz + w \cos uz \} dw \\ w_2 &= \exp(-\alpha_0 s - \psi z - \sigma z) \{ A_2 \cos(\beta_0 s + \tau z) + B_2 \sin(\beta_0 s + \tau z) \} \\ \text{但し } V &= \frac{EJ}{b_0 k} \left( \frac{gk}{\rho v^2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.12)$$

上式に於ける  $A_1, B_1, A_2, B_2, \Phi(w), \Psi(w)$  は (3.24) 式に示した諸条件に依り決定される。

先づ (a) 及び (c) の条件を満足するためには

$$A_1 = A_2 (= A \text{ とおく}), \quad -B_1 = B_2 (= B \text{ とおく}), \quad \Psi(u) = 0$$

となる要がある。又計算の便宜上

$$\Phi(w) = \frac{2F(w)}{\nu u \sqrt{w^2 + \psi^2}} \dots\dots\dots(5.13)$$

と置けば (5.17) 式は

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \exp(\alpha_0 s - \frac{1}{2}z - \sigma z) \{ A \cos(\beta_0 s - \tau z) - B \sin(\beta_0 s - \tau z) \} \\ &+ 2 \exp(-\psi z) \int_0^\infty \frac{F(u)}{\nu \sqrt{u^2 + \psi^2}} \sin \sqrt{u^2 + \psi^2} \nu s \left\{ \frac{V(u^2 + \psi^2)^2 + \psi}{w} \sin uz + \cos uz \right\} du \\ w_2 &= \exp(-\alpha_0 s - \psi z - \sigma z) \{ A \cos(\beta_0 s + \tau z) + B \sin(\beta_0 s + \tau z) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.14)$$

上式の  $w_1, w_2$  を (b) の条件に入れると次式が導かれる。

$$\exp(-\sigma z) \{ (\alpha_0 A - \beta_0 B) \cos \tau z + (\beta_0 A + \alpha_0 B) \sin \tau z \} + \int_0^\infty F(u) \left\{ \frac{V(u^2 + \psi^2)^2 + \psi}{w} \sin uz + \cos uz \right\} du = 0 \dots\dots\dots(5.15)$$

上式に於て  $z=0$  と置けば次式が得られる。

$$\alpha_0 A - \beta_0 B + \int_0^\infty F(w) dw = 0 \dots\dots\dots(5.16)$$

然し (5.15) 式は  $z=0$  に限らず、 $z \geq 0$  なるすべての  $z$  に対して成立するように  $A, B, F(w)$  を決める要がある。今

$$\left. \begin{aligned} \exp(-\sigma z) \cos \tau z &= f_I(z), \quad \exp(-\sigma z) \sin \tau z = f_{II}(z), \\ \frac{V(u^2 + \psi^2)^2 + \psi}{w} \sin uz + \cos uz &= f_w(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.17)$$

と置けば (5.15) 式は

$$(\alpha_0 A - \beta_0 B) f_I(z) + (\beta_0 A + \alpha_0 B) f_{II}(z) + \int_0^\infty F(w) f_w(z) dw = 0 \dots\dots\dots(5.18)$$

となる。上式が  $0 \leq z$  の範囲で常に成立するためには次の諸式が満足されねばならない。

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_0 A - \beta_0 B)(I, I) + (\beta_0 A + \alpha_0 B)(I, II) + \int_0^\infty F(w)(I, w) dw &= 0 \\ (\alpha_0 A - \beta_0 B)(II, I) + (\beta_0 A + \alpha_0 B)(II, II) + \int_0^\infty F(w)(II, w) dw &= 0 \\ (\alpha_0 A - \beta_0 B)(I, \xi) + (\beta_0 A + \alpha_0 B)(II, \xi) + \int_0^\infty f_\xi(z) \int_0^\infty F(w) f_w(z) dw dz &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.19)$$

但し  $(i, j) = \int_0^\infty f_i(z) f_j(z) dz \quad i, j = I, II, u$

又  $f_\xi(z)$  は (5.17) 式の  $f_w(z)$  の  $w$  の代りに  $\xi$  と置いた式とする。

(3.24) 式の (d) の条件に (5.14) 式を入れれば次式が得られる、

$$\frac{\alpha_0 A - \beta_0 B}{4\sigma V} + 2\sigma\tau(\beta_0 A + \alpha_0 B) + \int_0^\infty F(w)(w^2 + \psi^2) dw = \frac{P}{2EJ\nu^2} \dots\dots\dots(5.20)$$

結局  $A, B, F(w)$  を求める式として (5.16), (5.19), (5.20) 式があるが、これ等の式を変形すれば次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{\sigma}(\alpha_0 A - \beta_0 B) + \{8\sigma(\sigma^2 + \tau^2)V - 1\}(\beta_0 A + \alpha_0 B) &= \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\tau} \cdot \frac{2gP}{b_0 \rho l^2} \\ \{8\sigma(\sigma^2 + \tau^2)V - 1\}(\alpha_0 A - \beta_0 B) - \frac{\tau}{\sigma}(\beta_0 A + \alpha_0 B) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.21)$$

$$F(u) = -\frac{P}{EJ\nu^2} \cdot \frac{Vu^2}{\pi(u^2 + \{V(u^2 + \psi^2)^2 + \alpha\}^2)} \dots\dots\dots(5.22)$$

(5.21) 式より求めた  $A, B$  及び (5.22) 式に依る  $F(w)$  を (5.14) 式に入れると  $w_1, w_2$  が決定される。特に  $\nu$ -ル面の撓み曲線を得るため  $z=0$  と置き、且  $\sqrt{w^2 + \psi^2} = \gamma$  と置けば

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \exp(\alpha_0 s)(A \cos \beta_0 s - B \sin \beta_0 s) - \frac{2\nu P}{\pi b_0 k} \int_\psi^\infty \frac{\sqrt{\gamma^2 - \psi^2} \sin \gamma \nu s}{\gamma^2 (V^2 \gamma^6 + 2\psi V \gamma^2 + 1)} d\gamma \\ w_2 &= \exp(-\alpha_0 s)(A \cos \beta_0 s + B \sin \beta_0 s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.23)$$

(5.14) 又は (5.23) 式より見られるように走行荷重の後方の軌道及び路盤の撓み運動には振動の項が含まれており、振動のエネルギーは  $s \rightarrow \infty$  に於ても 0 とならない。この振動には一定の振動数はないが、振動数の最小は  $\frac{\psi}{2\pi} \sqrt{\frac{gk}{\rho}}$  でこれより  $\infty$  に至るまでの種々の振動数が含まれている。

(5.23) 式に依れば  $s=0, z=0$  に於けるレールの撓み量  $v_0$ 、レール面の傾斜角  $\theta_0$ 、レールに生ずる曲げモーメント  $M_0$  は次式に依つてあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= A \\ \tan\theta_0 &= \alpha_0 A - \beta_0 B \\ M_0 &= EJ\{\beta_0^2 - \alpha_0^2\}A + 2\alpha_0\beta_0 B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.24)$$

次に下の数字を用いた計算例を示す。

道床係数を  $C=13 \text{ kg/cm}^3$  とすれば  $D=24,000 \text{ kg/cm}$ 、 $k=727 \text{ kg/cm}^2$  となる。 $b_0=120 \text{ cm}$ 、 $\psi=0.002 \text{ cm}^{-1}$  とすれば  $K=2kb_0=349 \text{ kg/cm}^2$ 、レール重量を  $50 \text{ kg/m}$ 、従つて  $J=1744 \text{ cm}^4$  とし、 $\rho=0.0017 \text{ kg/cm}^3$ 、 $v=2780 \text{ cm/sec}$  とする。(3.18) 式に於て  $h \rightarrow \infty$  とすれば  $\kappa=0.01242$  (5.11)、(5.12) 式に依り  $\nu=7.37$   $V=123.4 \times 10^6 \text{ cm}^3$ 、(5.2) 及び (5.3) 式に依り  $\alpha_0=0.01172$ 、 $\beta_0=0.01367$ 、 $\sigma=0.002, 207$ 、 $\tau=0.001, 336$ 、(5.21) 式に依り  $\alpha_0 A - \beta_0 B = 0.00115 v_{st}$ 、 $\beta_0 A + \alpha_0 B = 0.02566 v_{st}$ 、これより  $A=1.124 v_{st}$ 、 $B=0.879 v_{st}$  を得る。(5.24) 式に依り荷重下に於けるレールの撓み量、レール面の傾斜角、レールに生ずる曲げモーメントを計算すれば表-3 の如くなる。

同様な方法で各種の速度に対して計算した結果も併せて表-3 に示す。

表-3 を表-2 に比較すればレール撓み量の増加率が約2倍になり。曲げモーメントの増加率は高速度に於て略一致する。表-3 に依れば荷重下のレール面の傾斜が比較的に大きいが  $v_{st}$  を  $0.1 \text{ cm}$  として実際の勾配に換算すれば速度  $120 \text{ km/h}$  に於ても  $0.2\%$  に過ぎない。

表-3

速度	km/h	0	60	100	120
$v_0$	$v_{st}$	1	1.042	1.124	1.156
$\tan\theta_0$	$\kappa v_{st}$	0	0.0075	0.0897	0.1736
$M_0$	$M_{st}$	1	1.049	1.093	1.097

(ii) 摩擦抵抗力の影響

路盤の深さが無限の時 (3.43)、(3.44) 式に於て  $h \rightarrow \infty$  と置けば摩擦抵抗力の影響のみを考慮した場合の軌道及び路盤の撓み運動をあらわす式が得られる。

## 6. 結 論

以上の計算に依つて車輛の通過時に於ける軌道の撓み量及びレールに生ずる曲げモーメントは軌道及び路盤の慣性を考慮することに依り多少増加することを知つた。この大きさは  $50 \text{ kg}$  レール敷設の線路で速度  $100 \text{ km/h}$  に於て静荷重の  $6\sim 12\%$  増であり、実験値に一致する。又レール面が平滑であつても車輛の通過に伴つて路盤内に振動を誘起し、この振動数は列車速度に関係せず略一定である。これも実験に依つて認められる所である。路盤が深さ  $\infty$  に至るまで均等の土質である時は一定の大きさの振動数は決まらないが荷重の後方の軌道に振動に依るエネルギーを洩す。

路盤が変形に対して摩擦抵抗力を有する時はレールの撓み曲線は荷重の前方に於て急になり、後方に於て緩かになる。然し実験に依れば摩擦抵抗力は変形の速度に比例せず略一定である。

\*1 1. 業務研究資料 第 19 卷第 41 号 堀越一三：道床の強度に就て、P.44

2. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol.54 Stephen Timoshenko: Stresses in Railroad Tracks.

3. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 90. Jahrgang, Heft 3 Artur Adler: Über Statik und Dynamik (Schwingungen) des Oberbaues.

4. 振動 第 1 卷第 2 号 澁谷巖：軌条、橋梁は移動荷重に依つて如何なる振動を生ずるか

5. 日本機械学会論文集 第 15 卷第 50 号 穂坂衛：レールの動力学的問題の研究

6. 土木学会論文集 第 4 号 高橋憲雄：鉄道線路上に於ける道床破壊速度

7. 土木学会誌 第 35 卷第 4 号 後藤尙男：弾性基礎にある梁の撓み振動に関する基礎的研究

\*2 本論文では指数関数を多数使うので印刷の便宜上  $e^x$  を  $\exp(x)$  を以てあらわすこととする

\*3 寺沢寛一著 自然科学者のための数学概論 4.10 直交関数系参照

\*4 レール面の傾斜角をあらわすのに  $\kappa v_{st} = \frac{P}{8EJ\kappa^2}$  なる単位を使つた理由は静荷重に依つてレールに生ずる撓み曲線の最急勾配が  $0.645 \kappa v_{st}$  (図-2.3 参照) を以てあらわされ、この勾配と対照する場合を考慮したためである。