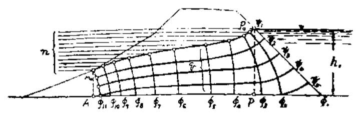
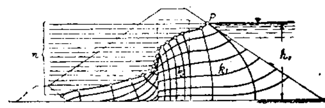
は滲透層部即ち堤体が均一に塡充されていない為めに起つたものと考へられる。従つて水位曲線に関する実験式を求めることが出来なかつた。

実際の堤体に於ける等ポテンシャル線及び流線が如何なる形を呈するかは以上述べ来つた理論から容易に推定出来る。滲透係数 k の値が方向によつて変化しないならば流線と等ポテンシャル線とは一応直交すると考へられるが，重力の働く場に於ては必ずしもそうはならない。即ち実際には 図—13，図—14 のようになると考へられる。図—14 は不透水性核心壁を有する場合である。之等の関係を理論的に推論しこの関係から滲透水量を算定することも出来る。[25)]

図—13



図—14



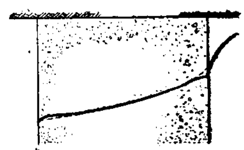
§8 結　語

筆者の行つた実験の如き滲透に関する理論は函数論により又具体的計算も楕円積分を用ひて行うことが出来る。然し之は純理論的考察であつてその実用化については研究の余地がある。筆者は Keutner の実験結果の次の2点について疑問を抱いた。

（1） 滲透水面 BC の存在を考へずに常に $h_0=h_2$ であるとし，従つて流出断面積を $F=h_2'b$ と考へていること。

（2） 滲透水位曲線を指数函数で表わし，一つの曲線を3つの部分に分けて考へていること。

図—15



筆者の行つた実験結果によれば次の如く考へられる。

即ち滲透水面 BC は常に存在する。従つて一般に $h_0 \fallingdotseq h_2$ であつて G. Hamel の理論と一致する。尤も金網の影響をもつと厳密に研究すれば 図—15 の如き曲線を描くと考へられるが，之は無視出来る程度のものである。（2）に対しては砂の不均等性から滑らかな曲線を得ず実験式を得るに至らなかつたが Parabola に近い曲線で表わされるのがよく，指数函数で表わされない。

之を要するに本実験によつて滲透水量 Q は h_1 と $h_2 l$ との函数であると結論することが出来る。然しこの程度の概括的結論しか得られなかつた事は物足りない極みである。将来機を得て根本的に考究して見たいと考へている。尚本研究は文部省科学研究費の補助を受けていることを記して謝意を表したい。

25) E.Meyer—Peter, Henry Favere, R. Müller; Beitrag zur Berechnung der Standsicherheit von Erddämmer. Schw. B. 1936.

任意の境界を有する2次元弾性体が境界條件として境界の変位が与えられる場合の一般解法に就て

正員　岡　林　稔*

A GENERAL SOLUTION FOR A TWO-DIMENSIONAL ELASTIC BODY WITH ANY BOUNDARY FOR WHICH THE DISPLACEMENT OF THE BOUNDARY IS GIVEN AS BOUNDARY CONDITIONS.

By Minoru Okabayashi, C.E.Member

Synopsis; This paper may be regarded as the sequel of the one entitled "A General Solution for a Given Distribution of Stress on the Boundary" which was published before.

The author has clarified that, when displacement of the boundary is given, the matter is as well a solution of Fredholm's integral equation through a procedure similar to the one described in the former report. In the conclusion on the solution for the case in

* 名古屋工業大学

which the stress disttribution is given, Fredholm's integral equation of the first kind was reported to be obtainable. As, however, it can be reduced to the second kind through a simple procedure, a revision has been made and is given at the beginning of this paper.

概要 本小論は先に発表した「境界上の応力分布が与へられる場合の一般解法」の続編と言ふべきもので，境界の変位が与へられた場合も類似の方法に依つて問題は Fredholm の積分方程式を解く事に帰着する事を示したものである。尚ほ，応力分布が与へられる場合の解法に於て，結論として Fredholm の第一種積分方程式が得られる事を示したが，之は簡単な考察に依つて第２年種積分方程式になるので，今回之を修正し，本小論の最初に併せて揭げてをいた。

境界上の応力分布が与へられる場合の解に対する修正

直角座標 x, y を採つて応力函数 Φ を次の様に置く。

$\Phi=U+yV$ 　但し U 及び V は調和函数

境界上の応力分布が境界曲線の長さの函数として与へられるとき，Vの境界上に於ける値を定める式はFredholmの第１種積分方程式で与へられる事を示したが，之は極めて簡単に第２種積分方程式に導かれる（而して第２種の方が第１種より解法は簡単である)。即ち，適当な写像函数

$$x=T\ (X,Y) \qquad y=G\ (X,Y)$$

に依つて変数を x 及び y から X 及び Y に変換し，xy 平面上の境界曲線を XY 平面上の X 軸に，xy 平面上に於ける弾性体の領域を XY 平面上に於ける X 軸より上部の半平面に変換する（第２種分方程式を導く為めには，必ずしも変数の変換を必要としないが，此の方が式の取扱が簡単であるので変換を行つたまでである)。依つて，Φ は次の通りになる。

$$\Phi=U+G(X,Y)V$$

今 YX 平面上の境界線 X 軸の原点を起点とし，X の正の方向に向ふ場合を正とする曲線の長さを S で表わせば Φ 及び $\partial\Phi/\partial Y$ の X 軸上の値は既知である。之等を夫々次の通りに書く事とする。

$$\Phi_s=f(S) \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)_s=g(s)$$ （尾字 S は境界線上の値なる事を示す。以下之に倣ふ。）

扨て V の境界上に於ける値を次の如く仮定する。

$$V_s=F(s)$$

しかるときは

$$V=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\frac{Y}{(x-t)^2+Y^2}dt, \qquad U=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(t)-g(t,o)F(t)\}\frac{Y}{(x-t)^2-Y^2}dt$$

故に

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y}=\frac{\partial U}{\partial Y}+G\ (X,Y)\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial Y}G(X,Y)V=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(t)-G(t,o)F(t)\}\frac{(X-t)^2-Y^2}{\{(x-t)^2+Y^2\}^2}dt$$
$$+\frac{G(X,Y)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\frac{(x-t)^2-Y^2}{\{(x-t)^2+Y^2\}^2}dt+\frac{\partial G}{\partial Y}V$$

今 $\left[\frac{\partial}{\partial Y}G(X,Y)\right]_{\substack{X=S\\Y\to 0}}=\gamma(s)$ と書く事とすれば，上式に於て点 (X, Y) が X 軸に限りなく近づいた極限を考へるとき次式が成立する（極限に於て V は $F(s)$ となる)。

$$\gamma(s)F(s)=G(s)-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{(s-t)^2-\varepsilon^2}{\{(s-t)^2+\varepsilon^2\}^2}dt+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{G(t,o)-g(s,o)\}\frac{(s--t)^2-\varepsilon^2}{\{(s-t)^2+\varepsilon^2\}^2}F(t)dt$$

上式は $F(s)$ を定める為めの第２種 Fredholm 積分方程式である。依つて之を解けば $F(s)$ 從つて V 及び U が求められ，問題は解決する。たゞ注意しなければならないのは，xy 平面に於ける境界曲線の切線が y 軸に平行になる点では $\gamma(s)$ の値が 0 になる事である。此の場合には S を其の点を除く他の点に相当するものとして積分方程式を解き，しかる後，$F(s)$ がその点に於ても連続である事を考慮すれば良い。但し，xy 平面上の境界曲線が y 軸に平行な部分を有するときは，このまゝではその部分に関する限り第１種積分方程式になつてしまうので，座標軸を適当に廻転して之を避けておく必要がある。

境界曲線上の変位が与へられる場合の解法

直角座標 xy を採つて弾性体内の一点 (x,y) に於ける変位の x 方向の成分を u, y 方向の成分を v とし，歪度成分を ε_x, ε_y, 及び γ_{xy} （γ_{xy} は剪断歪度）とすれば平面応力の場合には

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}(\sigma_x-n\sigma_y)\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}(\sigma_y-n\sigma_x)\qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{G}\tau_{xy}$$

但し, E: 弾性係数 n: ポアソン比 $G=E/2(1+n)$ σ_x, σ_y, 及び τ_{xy}: 応力度成分

平面変形の場合には

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}\{(1-n^2)\sigma_x-n(1+n)\sigma_y\}\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}\{(1-n^2)\sigma_y-n(1+n)\sigma_x\}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{G}\tau_{xy}$$

となる。両者に於ては常数係数の値が多少異るだけであるから以後に於ては平面応力の場合のみを取扱う事にする。今応力函数 Φ を次の様に置く。 $\Phi=U+yV$ 但し U 及び V は調和函数

尚ほ $\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$ $\sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$ $\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$ である。

しかるときは

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+y\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+2\frac{\partial V}{\partial y}\right)-n\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\right\}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)-n\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+y\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+2\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right\}\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2(1+n)}{E}\left\{-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\right\}\cdots\cdots(3)$$

今 V に対する共軛調和函数を $\overline{V}$ として (1) 式を積分すれば次の如くなる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}$$

$$\therefore u=\frac{1}{E}\left\{\left(-\frac{\partial U}{\partial x}-y\frac{\partial V}{\partial x}-2\overline{V}\right)-n\left(\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right\}+f_1(y)$$ 但し $f_1(y)$ は y のみの函数

$$\therefore u=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\left(\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial x}\right)+2\overline{V}\right\}+f_1(y)\cdots\cdots(4)$$

(2) 式を積分すれば次の如くなる。

$$v=\frac{1}{E}\left\{-\frac{\partial U}{\partial y}-y\frac{\partial V}{\partial y}+V\right)-n\left(\frac{\partial U}{\partial y}+y\frac{\partial V}{\partial y}-V2+V\right)+f_2(x)$$ 但し $f_2(x)$ は x のみの函数

$$\therefore v=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\left(\frac{\partial U}{\partial y}+y\frac{\partial V}{\partial y}+V\right)-2V\right\}+f_2(x)\cdots\cdots(5)$$

(4) 及び (5) 式を (5) 式に代入して $f_1(y)$ 及び $f_2(x)$ を定める式を作れば $\frac{d}{dy}f_1(y)+\frac{d}{dx}f_2(x)=0$ を得る。従つて a を常数として $\frac{d}{dy}f_1(y)=a$ $\frac{d}{dx}f_2(x)=-a$ $\therefore f_1(y)=ay+b$ $f_2(x)=-ax+c$ となる。(但し b 及び c は積分常数) 従つて (4) 及び (5) 式は夫々次の如くなる。

$$u=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi}{\partial y}+2\overline{V}\right\}+ay+b\cdots\cdots(6)$$

$$v=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-2V\right\}-ax+c\cdots\cdots(7)$$

念の為め平面変形の場合を求めれば次の如くなる。

$$u=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+2(1-n^2)\overline{V}\right\}+ay+b$$

$$v=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi}{\partial y}-2(1-n^2)V\right\}-ax+c$$

上記の式に於て a, b 及び c は与へられた弾性体の剛体としての変位を表わし, a は廻転を b 及び c は平行移動を表わす。但し u 及び v は弾性変形の成分表をわすのであつて, a, b 及び c は弾性体の何処を不動と考へるかに依つて現われるものであるから, 之等の係数は他項の係数と同程度に充分小なる ($1/E$の位の大きさ) 事が必要である。

しかしながら与へられた境界条件を満足する様に調和函数 U 及び V を定める為めには，之等の項を考慮する必要はないと言ふ事は当然である。事実　$U_1=U+\frac{Ea}{2}xy-\frac{E}{1+n}(bx+cy)$　$V_1=V-\frac{Ea}{2}x$　と置けば U_1 及び V_1 は共にやはり調和函数であり，$\frac{Ea}{2}x$ の共軛調和函数は $\frac{Ea}{2}y$ であるから V_1 の共軛調和函数 $\overline{V_1}$ は $\overline{V_1}=\overline{V}-\frac{Ea}{2}y$　である。依つて　$\Phi_1=U_1+yV_1$　と置けば

$$-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+2\overline{V_1}\right\}=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+2\overline{V}\right\}+ay+b$$

$$-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}-2V_1\right\}=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi}{\partial y}-2V\right\}-ax+c$$

となり，且つ

$$\Phi_1=U+\frac{Ea}{2}xy-\frac{E}{1+n}(bx+cy)+yV-\frac{Ea}{2}xy=\Phi-\frac{E}{1+n}(bx+cy)$$

であるから Φ_1 より計算される応力度成分は Φ より得られるものに等しい。以上によつて $ay+b$ 及び $-ax+c$ の項は夫々

$$-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+2\overline{V}\right\}\ 及び\ -\frac{1}{E}(1+n)\frac{\partial\Phi}{\partial y}-2V\Big\}$$

に含ませると考へる事が出来る。即ち (6) 及び (7) 式は

$$u=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi}{\Phi x}+2\overline{V}\right\}\cdots\cdots(8)$$

$$v=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial\Phi}{\partial y}-2V\right\}\cdots\cdots(9)$$

となる。上の事を言ひ換へれば又次の如くにもなる。

与へられた弾性体の境界曲線の方程式を次の如く置く。

$x=\phi(s)$　$y=\psi(s)$　但し S は境界曲線上の一点を起点とし正の方向に測つた該曲線の長さとする。今境界条件として境界上の点の変位の x 方向成分及び y 方向成分が S の函数で与へられ，それ等が

$U_s=f(s)$　及び　$U_s=g(s)$　（尾字 S は境界上の値なる事を示す）

であるとするとき，之等に夫々

$\{a\psi(s)+b\}$　及び　$\{-a\phi(s)+c\}$

を計算に便利な様に適当に（但しその大きさに就ては前述の様な考慮を払はなければならない）加へても良い。

扨て今境界曲線の全長を l とすれば $f(s)$ 及び $g(s)$ は S に関して連続函数であり，且つ　$f(o)=f(l)$　$g(o)=g(l)$　である。そこで境界上に於ける U 及び V の値を夫々　$U_s=F(s)$　$V_s=G(s)$　と仮定する。しかるときは U 及び V を求める事は $F(s)$ 及び $G(s)$ を一応既知函数として取扱へば Dirichlet の問題であるから

$$U=\int_0^l \mu(t)\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}dt\qquad V=\int_0^l \nu(t)\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}dt$$

但し　$\xi=\phi(t)$　$\eta=\psi(t)$　$\xi'=\frac{d}{dt}\phi(t)$　$\eta^1=\frac{d}{dt}\psi(t)$

$$\mu(t)=\frac{F(t)}{\tau}+\frac{1}{D(-1)}\int_0^l D(t,r;-1)\frac{F(r)}{\pi}dr$$

$$\nu(t)=\frac{G(t)}{\tau}+\frac{1}{D(-1)}\int_0^l D(t,r;-1)\frac{G(r)}{\pi}dr$$

但し $D(-1)$ 及 $D(t,r;-1)$ は夫々 Fredholm の行列式及び第1小行列式である。従つて

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\int_0^l \mu(t)\frac{(x-\xi)^2\eta'-2(x-\xi)(y-\eta)(\xi'-(y-\eta)^2\eta'}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^2}dt$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\int_0^l \nu'(t)\frac{(x-\xi)'+2(x-\xi)(y-\eta)\eta'-(y-\eta)^2\xi'}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)\}^2}dt$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\int_0^l \mu(t)\frac{(x-\xi)^2\eta'+2(x-\xi)(y-\eta)\xi'-(y-\eta)^2\eta'}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^2}dt$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\int_0^l \nu(t)\frac{(x-\xi)^2\eta'+2(x-\xi)(y-\eta)\eta'-(y-\eta)^2\eta'}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^2}dt$$

$$\overline{V}=\int_0^l \nu(t)\frac{(x-\xi)\xi'-(y-\eta)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}dt$$

を得る。之等を (8) 及び (9) 式に代入し更に

$$x=\phi(s)-\varepsilon\psi^1(s)\quad y=\psi(s)+\varepsilon\phi^1(s)$$

を代入して $\varepsilon\to+0$ の極限を考へれば両式の左辺は夫々 $f(s)$ 及び $g(s)$ となる。又右辺に於て $F(r)$ 又は $G(r)$ を含む項，例えば

$$\overline{V}_s=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^l \nu(t)\frac{\{\phi(s)-\varepsilon\psi'(s)-\xi\}\xi'+\{\psi(s)+\varepsilon\phi'(s)-\eta\}\eta'}{\{\phi(s)-\varepsilon\psi'(s)-\xi\}^2+\{\psi(s)+\varepsilon\phi'(s)-\eta\}^2}dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^l \frac{G(t)}{\tau}\frac{\{\phi(s)-\varepsilon\psi'(s)-\xi\}\xi'+\{\psi(s)+\varepsilon\phi'(s)-\eta\}\eta'}{\{\phi(s)-\varepsilon\psi'(s)-\xi\}^2+\{\psi(s)+\varepsilon\phi'(s)-\eta\}^2}dt$$

$$+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^l \frac{\{\phi(s)-\varepsilon\psi'(s)-\xi\}\xi'+\{\psi(s)+\varepsilon\phi'(s)-\eta\}\eta'}{\{\phi(s)-\varepsilon\psi'(s)-\xi\}^2+\{\psi(s)+\varepsilon\phi'(s)-\eta\}^2}dt\int_0^l \frac{D(t,r;-1)}{\pi D(-1)}G(r)dr$$

の末項に於て変数 t と r との文字を入換へ，積分順序を変更する。此の手続を $F(r)$ 又は $G(r)$ を含む凡ての項に就て行へば $V_s=G(s)$ なる事を考慮して結局次式を得る。

$$f(s)=\int_0^l P_1(s,t)F(t)dt+\int_0^{\sim} Q_1(s,t)G(t)dt\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

$$g(s)=\int_0^l P_2(s,t)F(t)dt+\int_0^l Q_2(s,t)G(t)dt-mG(s)\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

但し　m: 常数

而して $P_1(s,t)$, $Q_1(s,t)$, $P_2(s,t)$, 及び $Q_2(s,t)$ は凡て既知函数である。故に上式は $F(t)$ 及び $G(t)$ を定める為めの連立 Fredholm 積分方程式である。即ち (11) 式を書き代へて

$$G(s)=\frac{\int_0^l P_2(s,t)F(t)dt-g(s)}{m}+\frac{1}{m}\int_0^l Q_2(s,t)G(t)dt$$

と書けば上式右辺第1項は結局 S の函数であるから上式を $G(s)$ に関する Fredholm の第2種積分方程式と見る事が出来る。依つて核 $Q_2(s,t)$ の行列式及第1小行列式を係数 $1/m$ に対して夫々

$$D\left(\frac{1}{m}\right)\ 及び\ D\left(s,t;\frac{1}{m}\right)$$

とするとき $G(s)$ は次の如くなる。

$$G(s)=\frac{\int_0^l P_2(s,t)F(t)dt-g(s)}{m}+\frac{1}{m}\int_0^l\left[\frac{D\left(s,t;\frac{1}{m}\right)}{D\left(\frac{1}{m}\right)}\left\{\int_0^l P_2(t,r)F(r)dr-g(t)\right\}\right]dt$$

之を (10) 式に代入して $F(r)$ を含む項は例によつて積分順序を変更した後，文字を交換し，式を整理すれば之は $F(s)$ に関する第1種積分方程式となる。斯くて $F(s)$ が定まれば $G(s)$ も定まるから問題は解決した事になる。

或は又次の様に解けば最後に Fredholm の第2種積分方程式が得られる。即ち　$V_s=G(s)$ のみを仮定する。依つて $G(s)$ を一応既知函数として取扱へば V が求まり，従つて $\overline{V}$ 及び $\frac{\partial V}{\partial x}$ 等が求まる。従つてそれ等の値を (8) 式に代入して点 (x,y) が境界曲線に限りなく近づいた極限を考へれば $\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_s$ が求められる。しかるに $\frac{\partial U}{\partial x}$ も調和函数であるから $\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_s$ が与へられゝば之を求める事が出来る。従つて又 $\frac{\partial U}{\partial y}$ が求まり之を (9) 式に代入して点 (x,y) が限りなく境界曲線に近づいた極限を考へれば $G(s)$ を定める為めの第2種 Fredholm 積分方程式が得られる。斯くて $G(s)$ が求まれば問題は解決した事になる。

変数の変換　境界上に於ける応力分布が与へられた場合の解法と全く同様に，適当な写像函数を使つて変数 x, y を X, Y に変換し xy 平面上に於ける境界曲線を XY 平面上の X 軸に写像して解を求める事が出来る。たゞ此の場合には次の事を注意しさへすれば良い。第１に

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y}-\frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}}{\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y}-\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}} \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial x}{\partial Y}-\frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial x}{\partial X}}{\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial x}{\partial Y}-\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial x}{\partial X}}$$

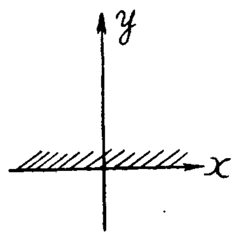
であり，V に関しても同様な式が成立する事。第２に $W(x,y)$ と $\overline{W}(x,y)$ とが互ひに共軛な調和函数であるときに，之等は変数を変換した後にも X 及び Y に関して，やはり互いに共軛な調和函数である事。

計算例

i）境界が一つの無限直線である場合（図—1）

境界を x 軸にとる事にし，弾性体の領域は $y>0$ の部分であるとする。今原点を起点として境界線の長さ S を測るものとし境界線上の点の変位の x 方向成分及び y 方向成分が次式で与えられてあるものとする。

図—1



$$u_s=-\frac{p}{E\pi}\left\{(s+a)\log(s+a)^2-(s-a)\log(s-a)^2\right\}$$

$$v_s=\frac{pa}{E}(1-n)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots s\geqq a$$

$$v_s=\frac{ps}{E}(1-n)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a\geqq s\geqq -a$$

$$v_s=-\frac{pa}{E}(1-n)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots -a\geqq s$$

但し p 及び a は常数。n はポアソン比とする。

扨て　$\Phi=U+yV$　と置いて（8）及び（9）式を見れば，境界線上即ち $y\to+0$ の極限に於て両式は

$$u_s=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial U}{\partial x}+2\overline{V}\right\}_s \qquad v_s=-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial U}{\partial y}-(1-n)V\right\}_s$$

しかるに

$$-\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial U}{\partial x}+2\overline{V}\right\} \text{ 及び } -\frac{1}{E}\left\{(1+n)\frac{\partial U}{\partial y}+-(1-n)V\right\}$$

は共に調和函数であるから u_s 及 v_s が与へられた今，之等は直ちに求める事が出来る。即ち

$$(1+n)\frac{\partial U}{\partial x}+2\overline{V}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p}{\pi}\left\{(t+a)\log(t+a)^2-(t-a)\log\ (t-a)^2\right\}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$$

$$=\frac{p}{\pi}\left[(x+a)\log\{(x+a)^2+y^2\}-(x-a)\log\{(x-a)^2+y^2\}+2y\tan^{-1}\frac{x+a}{y}-2y\tan^{-1}\frac{x-a}{y}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

$$(1+n)\frac{\partial U}{\partial y}-(1-n)V=\int_{-\infty}^{-a}\frac{pa}{\pi}(1-n)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt-\int_{-a}^{a}\frac{p}{\pi}(1-n)\frac{ty}{(x-t)^2-y^2}dt-\int_{a}^{\infty}\frac{pa}{\pi}$$

$$(1-n)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt=\frac{p}{\pi}(1-n)\left\{(x-a)\tan^{-1}\frac{x-a}{y}-(x+a)\tan^{-1}\frac{x+a}{y}-\frac{y}{2}\log\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right\}\cdots (13)$$

しかるに　$(1+n)\frac{\partial U}{\partial y}-(1-n)V$　の共軛調和函数は　$(1+n)\frac{\partial U}{\partial x}-(1-n)\overline{V}$　であるから（13）式より

$$(1+n)\frac{\partial U}{\partial x}-(1-n)\overline{V}=\frac{p}{2\pi}(1-n)\left[(x-a)\log\{(x-a)^2+y^2\}-(x+a)\log\{(x+a)^2+y^2\}\right.$$

$$\left.+2y\tan^{-1}\frac{x-a}{y}-2y\tan^{-1}\frac{x+a}{y}\right]$$

を得る。之と（12）とより

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0 \text{ 及び } \overline{V}=\frac{p}{\pi}\left[\frac{x+a}{2}\log\{x(+a)^2+y^2\}-\frac{x-a}{2}\log\{(x-a)^2+y^2\}+y\tan^{-1}\frac{x+a}{y}-y\tan^{-1}\frac{x-a}{y}\right]$$

を得る。従つて

$$V=\frac{p}{\pi}\left\{(x+a)\tan^{-1}\frac{x+a}{y}-(x-a)\tan^{-1}\frac{x-a}{y}+\frac{y}{2}\log\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right\}$$

を得る。之を (13) 式に代入すれば

$$\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

を得る。従つて

$$U=\text{常数}$$

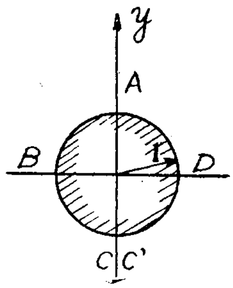
となる。常数項は無視しても良いから求める解は次の如くなる。

$$\Phi=\frac{p}{\pi}y\left\{(x+a)\tan^{-1}\frac{x+a}{y}-(x-a)\tan^{-1}\frac{x-a}{y}+\frac{y}{2}\log\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right.$$

此の結果を調べれば，之は境界の直線に沿つて $-a\leqq x\leqq a$ の範囲に於て剪断応力が作用する場合である事が解る。境界が直線の場合には以上の如く極めて容易に解が求められる。

ii) 境界が単位円である場合 (図—2)

図—2



図のAを起点としてA→Bの方向に曲線の長さを測るものとし，境界条件は次の如くであるとする。

$$u_s=\frac{p}{E}(1+n)\sin s \qquad v_s=\frac{p}{E}(1+n)\cos s$$

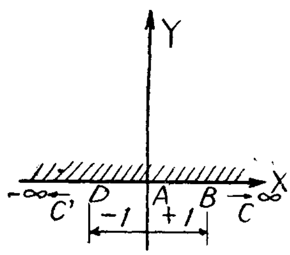
今次の様な写像函数によつて変数を変換し xy 平面上の単位円を XY 平面上の X 軸に写像する (図—3)。

$$x=\frac{-2X}{X^2+(Y+1)^2} \qquad y=\frac{2(Y+1)}{X^2+(Y+1)^2}-1$$

而して XY 平面上にて X 軸に沿つて原点Aからの長さを s_1 で表わせば

$$\sin s=\frac{2s_1}{1+s_1^2} \qquad \cos s=\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2}$$

図—3



なる関係があるから u 及 v の此の境界上の値は夫々次の如くなる。

$$u_{s_1}=\frac{p}{E}(1+n)\frac{2s_1}{1+s_1^2} \qquad v_{s_1}=\frac{p}{E}(1+n)\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2}$$

今求める応力函数を

$$\Phi=U+yV$$

と置いて XY 平面に於ける V の境界上の値を $G(s_1)$ と仮定する。しかるときは

$$V(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t_1)}{\pi}\frac{Y}{(X-t_1)^2+Y^2}dt, \qquad \overline{V}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t_1)}{\pi}\frac{X-t_1}{(X-t_1)^2+Y^2}dt_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial V}{\partial X}\dfrac{\partial y}{\partial Y}-\dfrac{\partial V}{\partial Y}\dfrac{\partial y}{\partial X}}{\dfrac{\partial x}{\partial X}\dfrac{\partial y}{\partial Y}-\dfrac{\partial x}{\partial Y}\dfrac{\partial y}{\partial X}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t_1)}{\pi}\frac{(X-t_1Y-t_1)(X^2+Y^2-t_1X+Y)}{\{(X-t_1)^2+Y^2\}^2}dt,$$

を得る。故に之を (10) 式に代入して点 (X,Y) が限りなく X 軸に近づいた極限をとれば次式を得る。

$$\frac{p}{E}(1+n)\frac{2s_1}{1+s_1^2}=-\frac{1}{E}(1+n)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{s_1}-\frac{1+n}{E}\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t_1)}{\pi}\frac{(s_1-\varepsilon t_1-t_1)(s_1^2\varepsilon^2-t_1s_1+\varepsilon)}{\{(s_1-t_1)^2+\varepsilon^2\}^2}dt,$$

$$-\frac{2}{E}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t_1)}{\pi}\frac{s_1-t_1}{(s_1-t_1)^2+\varepsilon^2}dt,$$

右辺第1項と第2項をまとめて書いて次式を得る。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{s_1}=-p\frac{2s_1}{1+{}_2^2,}-\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t_1)}{\pi}R_1(s_1,t_1,\varepsilon)dt,$$

$$\therefore\frac{\partial}{\partial x}U(X,Y)=-\frac{2p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t_1}{1+t_1^2}\frac{Y}{(X-t_1)^2+Y^2}dt_1-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(r_1)}{\pi^2}R_1(t_1,r_1,\varepsilon)dr_1\right\}\frac{Y}{(X-t_1)^2+Y^2}dt,$$

しかるに $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ とは互いに共軛であるから

$$\frac{\partial}{\partial y}U(X,Y)=\frac{2p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t_1}{1+t_1^2}\frac{X-t_1}{(X-t_1)^2+Y^2}dt_1+\int_{-\infty}^{\infty}\{\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(r_1)}{\pi^2}R_1(t_1,r_1,\varepsilon)dr_1\}\frac{X-t_1}{(X-t_1)^2+Y^2}dt_1$$

を得る。しかるに

$$\frac{2p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t_1}{1+t_1^2}\frac{X-t_1}{(X-t_1)^2+Y^2}dt_1=2p\frac{-X^2+Y^2-1-Y(X^2+Y^2-1)}{(X^2+Y^2-1)^2+4X^2}$$

であるから，之は $Y\to+0$ の極限に於ては

$$-\frac{2p}{1+s_1^2}$$

となり，又

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t_1)}{\pi}\frac{(X^2+Y^2-t_1X+Y)^2-(X-t_1Y-t_1)^2}{2\{(X-t_1)^2+Y^2\}^2}dt_1$$

であるから，之は $Y\to+0$ の極限に於ては

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{s_1}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t_1)}{\pi}\frac{(s_1^2+\varepsilon_1^2-t_1s_1+\varepsilon_1)^2-(s_1-t_1\varepsilon_1-t_1)^2}{2\{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2\}^2}dt_1$$

となる。之等を (11) 式に代入すれば次の如くなる。

$$\frac{p}{E}(1+n)\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2}=\frac{1+n}{E}\frac{2p}{1+s_1^2}-\frac{1+n}{E}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\{\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(r_1)}{\pi^2}R_1(t_1,r_1,\varepsilon)dr_1\}\frac{s_1-t_1}{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2}dt_1$$

$$-\frac{1+n}{E}\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2}\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t_1)}{\pi}\frac{(s_1^2+\varepsilon_1^2-t_1s_1+\varepsilon_1)^2-(s_1-t_1\varepsilon_1-t_1)^2}{2\{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2\}^2}dt_1+\frac{1+n}{E}G(s_1)$$

上式に於て右辺第2項の積分順序を変更し文字 r_1 と t_1 とを交換すれば，被積分函数は $G(t_1)$ を含んだものになる。又 v_{s_1} には前に説明した様に，予め適当な常数項を加へてをいても良いから，上式左辺に $\frac{p}{E}(1+n)$ を加へておく事にする。しかるときは上記の第2種 Fredholm 積分方程式の解は

$G(t_1)=0$ 　となる。從つて　$V=0$　である。故に

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{2p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t_1}{1+t_1^2}\frac{Y}{(X-t_1)^2+Y^2}dt_1=2p\frac{2XY-X(X^2+Y^2+1)}{(X^2+Y^2-1)+4X^2}$$

となる。変数を之え戻せば之は次の如くなる。

$$\frac{\partial U}{\partial x}=px \qquad U=\frac{p}{2}x^2+h(y)$$ 　但し　$h(y)$ は y のみの函数

が得られる。しかるに U は調和函数であるから

$$h(x)=-\frac{p}{2}y^2$$

でなければならない事が容易に解る。從つて

$U=\frac{p}{2}(x^2-y^2)$　であり，求むる解は　$\Phi=\frac{p}{2}(x^2-y^2)$　である。