

調圧水槽の安定条件について(第1報)

正員 工博 本 間 仁*
正員 林 泰 造**

STABILITY CONDITION OF SURGE TANK (1st Report)

Dr. Eng. M. Homma C. E. Member ; T. Hayashi C. E. Member

Synopsis; This paper describes about the stability condition of surge tank.

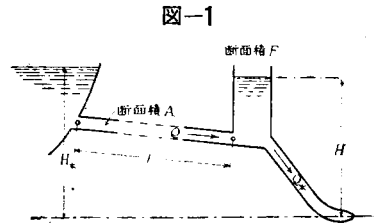
To survey theoretically how inertia and resistance of penstock and inertia of rotation parts of turbin and generator and inertia of other generator that is parallel operated exert influence on stability of surge tank.

From these elements, general stability conditions are described, and from the result of this study, in case of the generator that is connected at surge tank is parallel operated, necessary surge tank section area is most smaller than the section which is compered from the methods of Thoma condition.

梗概 調圧水槽の安定条件について考察したものである。先づ在来の Thoma の条件について種々考察を加え、次いで同条件の構成の際に落されて居た水圧管中の水の慣性及び抵抗、水車及び之と直結せられた発電機等の回転部分の慣性並びに並列運転中の他の発電機の慣性等が調圧水槽の安定条件に如何なる影響を持つかを理論的に考察し、之等の諸因子を含む一般化された安定条件を求めた。之に拠ると在来の Thoma の条件から求められる所要調圧水槽断面積は、特に同調圧水槽に繋がる水車発電機が並列運転網中に入つて運転せられる場合、相当程度縮小し得るものである事が推察せられるのである。

§1. 予備的考察

図-1 の如き貯水池と調圧水槽等を含む系について考える。此の系は調圧水槽の存在の故に1自由度の振動系を形成し、貯水池と調圧水槽との間にU字管振動の可能性が生ずる。但し貯水池の断面積は、一般に調圧水槽の夫れと比較して十分大と考えられるので、貯水池の水面は殆ど振動を起さず、調圧水槽の水面のみが上下に振動を起すものとする。水車が停止して居る時には、上記の系に生じたU字管振動は当然減衰して行く。然し水車が運転して居る場合には、水車調速器の自動制御作用の結果、上記のU字管振動は水車の案内瓣に近似的に



$$HQ_* = \text{const} \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

但し H : 図示(図-1) Q_* : 水車への流入水量。

の関係が成立つ様な開閉運動を生起し、自らのU字管振動に共振する強制作用を水車の案内瓣に誘発する。この結果系は自動振動に陥る。周知の Thoma の条件:

$$F > \frac{l}{2kH_0Ag} \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

但し、 k : 隧道中の水の抵抗係数, g : 重力の加速度,
 H_0 : 有効落差、(平衡状態に於ける 図-1 の H の値), 他の記号は 図-1 参照。

は、上記自動振動の動的安定条件として求められたものである。処でこの Thoma の条件式の誘導の内容を示す上記の説明からも明らかな様に、同条件式の誘導に当つては、水圧管路中の水の慣性、水車並びに之に直結せられた回転部分の慣性、並列運転中の他の発電機及び夫れに附随した回転部分の慣性、其の他の影響が無視せられて居る。而して之等の影響は概して系の振動の動的安定性を増大せしめるものと考えられ、その結果安定性の為に必要な調圧水槽の断面積を縮小せしめ得る筈である。本報に於ては、主として之等の点に関して以下に逐次考察を加えて見る事とする。

§2. 水車調速器の自動制御作用についての考察

前節に於て記述した如く、自動振動の本体はU字管系には非ずして実は水車調速器に存する。従つて調圧水槽

* 東京大学第一工学部
** 同 上

の安定性を検べる為には、先づ水車調速器の特性を検する必要がある。

図-2 は水車調速器を最も単純に模型化した図である。 Q_* が大に過ぎると水車が少し廻転を早め、従つて II 軸も亦廻転を早める。従つて遠心子が A 点を上方に引上げ、為に挺子作用によつて連結された案内瓣 S が閉ずる方向に廻転して Q_* の量を制御する。 Q_* が小に失すればその逆の作働が自動的に営まれる。斯くして Q_* の変動が、案内瓣 S の開閉運動を誘起する。勿論此處で遠心子 P の存在は更に別の一つの振動系を形成する。然し Q_* の変動の周期即ち調圧水槽中水面の振動周期が、一般に、遠心子 P の上下固有振動周期に比して十分大である事及び当然存在する若干の減衰の要素を考慮するならば、遠心子 P の固有振動は Q_* の変動には殆ど影響を及ぼさぬ事が推察される。従つて点 A の位置と案内瓣 S の開き面積とは一意的に対応し、一方水車の回転速度と点 A の位置とも亦一意的に対応すると看做す事が出来る。従つて水車の回転速度 Ω と案内瓣 S の開き面積 S とは一意的に対応する事が判明する。即ち水車の回転速度が遅くなる程 A 点が下降し、為に B 点が上昇して S が開く。そしてその間の変化を近似的に 図-3 の如き直線関係：

$$S = a - b\Omega, \quad (a, b: \text{常数}) \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

と考える。

以上は、調速装置を直接型剛結合式に模型化して考えたのである。然し実際には、水車の調速器は 図-4 の原理図の如き中継機構を有する間接作働型になって居り、更にその他に等回転装置 (イソドローム装置) (図示せず) が附いて弾性結合式となつて居る。然し Q_* が調圧水槽中の水面の振動に応じて、絶えず其の値に変動を生じて居るならば、かかる非常状態に応じては弾性結合式は略々剛結合式の如く作働する事、及び剛結合式と考えた時の中継機構系の固有振動周期が Q_* の変動即ち調圧水槽水面の振動周期に比して一般に十分小なるものと考えられる事から、実際の調速装置を原理的に 図-2 の如き直接型剛結合式の作働を以て近似しても大過ないものと考えられるのである。従つて実際の場合の水車の回転速度 Ω と、水車案内瓣の開き面積 S との関係も亦、特に吾々の場合においては、一意的に (2.1) で表わされるものとするのである。

以上の記述から判明する様に、瓣が更に開く (又は閉ずる) 為には、水車の回転速度がより遅く (又は速く) なる必要がある。そこで水車及び之に直結された回転部分の慣性能率 I が大きい程、 Q_* の変動に対しても自身の回転速度の変動の度合が少く、従つて案内瓣 S の開閉運動の振幅も小になる。従つて水車等の I が大なる程、全体の系の不安定性の原因である瓣 S の開閉運動の振幅が小になり、不安定性が減じて全体の系の安定性が増す事が予想される。以上の如き考察の許に、以下に順を追つて系の安定性を吟味する為の諸式を樹てゝ行こう。

§3. 基本式

(a) 隧道中の水の運動方程式：

$$\frac{l}{Ag} \frac{dQ}{dt} = H_* - H - kQ^2 \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

左辺は慣性項、右辺は圧力差及び抵抗の項 (何れも水頭) である。記号については 図-1 を参照する。

(b) 調圧水槽に関する連続方程式：

$$F \frac{dH}{dt} = Q - Q_*$$

(c) 水圧管中の水の柱に対する運動方程式：

$$\frac{l_*}{A_*g} \frac{dQ_*}{dt} = \left(\frac{p_A}{w} - \frac{p_B}{w} \right) + \sum_i l_i \sin \theta_i - k_* Q_*^2. \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

記号は 図-5 に示される。(3.3) の左辺は慣性項、右辺第1項は水柱上下端 (A 点及び B 点) に於ける圧力差の項、第2項は自重、第3項は抵抗の項 (何れも水頭) である。

(3.3) に於ける p_A/w , p_B/w , p_C/w は次の如くにして値が与えられる：

図-2

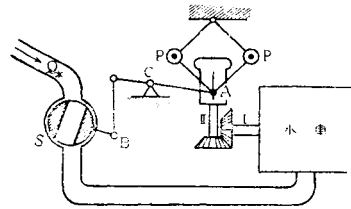


図-3

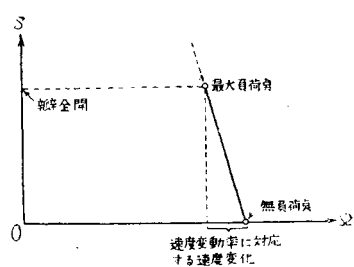
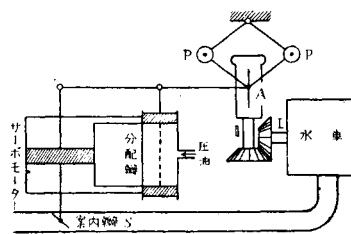


図-4



$$\frac{p_A}{w} = H_A - \frac{u_*^2}{2g}, \text{ (Bernoulli の定理により)}$$

$$\frac{p_C}{w} = h_0: \text{ 常数, (ドラフト管中の圧力は時間的に略々常数と看做す)}$$

$$\frac{p_B}{w} = \frac{p_C}{w} + \left(\frac{u_*^2}{2g} - \frac{v_*^2}{2g} \right) = h_0 + \frac{1}{2g} (u_*^2 - v_*^2).$$

$$\text{処で } u_* A_* = u_* S \text{ なる故, } \frac{p_B}{w} = h_0 + \frac{v_*^2}{2g} \left(\frac{A_*^2}{S^2} - 1 \right).$$

之等の表現を(3.3)に代入して p_A, p_B を同式から消去すれば

$$\frac{l_*}{A_* g} \frac{dQ_*}{dt} = H - k_0 - \frac{Q_*^2}{2gS^2} - k_* Q_*^2 \dots\dots\dots(3.3')$$

(d) 水車に対する基本式:

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \mathfrak{M} - \{W + \mu(\Omega - \Omega_0)\} \dots\dots\dots(3.4)$$

- 茲に I : 慣性能率
- \mathfrak{M} : 水車への入力(トルク)
- W : 平衡状態に於ける外部負荷(トルク)
- Ω_0 : 平衡状態に於ける水車の回転速度
- Ω : 任意の瞬間に於ける水車の回転速度

(3.4) の左辺は慣性項, 右辺第1項は入力, 第2項は出力である。扱て入力 \mathfrak{M} に対しては, 吾々は次の関係を知つて居る:

$$\mathfrak{M} = f w \frac{E_* Q_*}{\Omega} = f w \left(h_0 + \frac{Q_*^2}{2gS^2} \right) Q_* \dots\dots\dots(3.5)$$

- 但し f : 水車発電機の効率
- E_* : 水車入口に於ける水の持つ全水頭
- w : 水の単位容積重量

従つて(3.5)を(3.4)に代入すれば

$$I \frac{d\Omega}{dt} = f w \frac{\left(h_0 + \frac{Q_*^2}{2gS^2} \right) Q_*}{\Omega} - \mu(\Omega - \Omega_0) - W \dots\dots\dots(3.4')$$

此処で, 水車に直結せられた発電機が発電網中に入つて並列運転を行つて居る場合に, I の採り方が問題となる。並列運転中の発電機系と, 夫れを機械的に類推せしめる形式とが夫々 図-6 (a) 及び (b) に示される。即ち 図-6 (a) の如く電気的に連結された系は, 図-6 (b) の如き弾性軸を以て相互に連結された回転質量系に翻訳される。図-6 (b) の I_4 に加わる振動外力の振動周期が, 系の固有振動周期に比して十分に長い時には, I_1, \dots, I_4 相互の間を連結する各弾性軸の振り弾性の値に関せず, I_1, \dots, I_4 は合体して同一位相で外力に対応して動き, 慣性抵抗のみを与える(弾性抵抗は与えない)。之と同様に, 図-6 (a) の調圧水槽付きの発電所の発電機 I_4 は, 調圧水槽中水面の振動によつて入力変動を受けて動揺を生ずるが, その周期が発電機 I_1, \dots, I_4 間の電気機器的な固有振動周期に比して著しく長い事から, 入力の変動に抵抗するものは, 並列運転中の発電機の慣性抵抗を総計したのもののみである事が推察せられる。従つて図の場合には, 慣性能率 I としては $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ とすれば良く, 一般には

$$I = \sum_{i=1}^n I_i, \text{ } I_i: \text{ 並列運転下に於ける発電機等回転部分の慣性能率}$$

と採れば良い事が推察される。

尙水車の作働の特性式(1.1)は, 實は(3.4)の近似式に當つて居る事が後に第7節に於て判明する。

斯くして求められた(3.1), (3.2), (3.3'), (3.4') 及び(1.1)の5箇の式が所要の基本式となる。

§4. 平衡位置

(3.1), (3.2), (3.3'), (3.4') に於て, 時間に関して変動する項を0と置いた4式と(2.1)とを併せた次の式が平衡位置を定める式となる:

$$H^* - H - kQ^2 = 0 \dots\dots\dots(4.1) \quad Q - Q_* = 0 \dots\dots\dots(4.2)$$

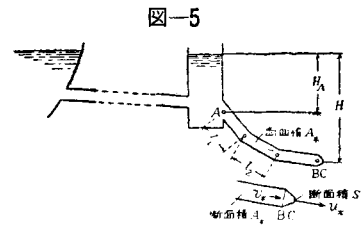
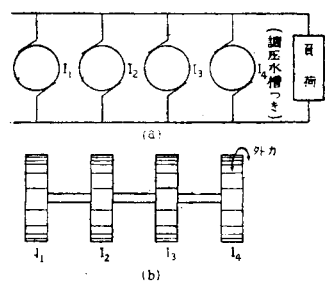


図-5

図-6(a) 及び (b)



$$H-h_0-\frac{Q_*^2}{2gS^2}-k_*Q_*^2=0 \dots\dots\dots(4.3) \quad fw\frac{\left(h_0+\frac{Q_*^2}{2gS^2}\right)Q_*}{\Omega}-W=0 \dots\dots\dots(4.4)$$

$$S=a-b\Omega \dots\dots\dots(4.5)$$

之等の式は一見複雑であるが、実は平衡点水位 H 、同流量 $Q(=Q_*)$ が大約与えられて居り、又近似値を求めればそれで当面の目的に対しては十分である様な場合が多い。従つて図式なり、逐次計算なりによつて容易に所要の目的を達する事が出来る。

§5. 微小変位の安定性の吟味

前節に於て求められた平衡状態に於ける諸量に添字 o を附して $Q_o(=Q_*)$ 、 H_o 、 Ω_o と記し、之等の平衡位置からの微小変位を小文字 q, h, ω, q_* で表わす。即ち

$$Q=Q_o+q, H=H_o+h, \Omega=\Omega_o+\omega, Q_*=Q_o+q_* \dots\dots\dots(5.1)$$

と記す。(5.1) を (3.1), (3.2), (3.3') 及び (3.4') に代入して、 q, h, ω, q_* に就ての2次以上の微小量を無視し、且 (4.1) 乃至 (4.4) の関係式を使用して整頓すれば、(3.1), (3.2), (3.3') 及び (3.4') は夫々次の如くなる：

$$\frac{l}{Ag} \frac{dq}{dt} = -h - 2kQ_o \cdot q \dots\dots\dots(5.2)$$

$$F \frac{dh}{dt} = q - q_* \uparrow \dots\dots\dots(5.3)$$

$$\frac{l_*}{A_*g} \frac{dq_*}{dt} = h - Q_o \left(\frac{1}{gS_o^2} + 2k_* \right) q_* - \frac{bQ_o^2}{gS_o^3} \omega \dots\dots\dots(5.4)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = \frac{fw}{\Omega_o} \left(h_o + \frac{3Q_o^2}{2gS_o^2} \right) q_* + \frac{fw}{\Omega_o} Q_o \left\{ \frac{bQ_o^2}{gS_o^3} - \frac{1}{\Omega_o} \left(h_o + \frac{Q_o^2}{2gS_o^2} \right) \right\} \omega \dots\dots\dots(5.5)$$

此処で

$$q = B_1 e^{\lambda t}, h = B_2 e^{\lambda t}, \omega = B_3 e^{\lambda t}, q_* = B_4 e^{\lambda t} \dots\dots\dots(5.6)$$

を、(5.5) に代入して B_1, B_2, B_3, B_4 が恒等的には 0 でない為の条件を求めれば：

$$\begin{vmatrix} \frac{l}{Ag} \lambda + 2kQ_o & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -F\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & I\lambda - \frac{fw}{\Omega_o} Q_o \left\{ \frac{bQ_o^2}{gS_o^3} - \frac{1}{\Omega_o} \left(h_o + \frac{Q_o^2}{2gS_o^2} \right) \right\} + \mu & -\frac{fw}{\Omega_o} \left(h_o + \frac{3Q_o^2}{2gS_o^2} \right) \\ 0 & -1 & \frac{bQ_o^2}{gS_o^3} & \frac{l_*}{A_*g} \lambda + 2Q_o \left(\frac{1}{2gS_o^2} + k_* \right) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(5.7)$$

此の行列式は、対称でなく、 $k_{ij} \neq k_{ji}$ 。従つて系は non-unilateral 系であり、 λ が正の実部を持つ危険性を有す。(5.7) を開いて λ の降冪に記せば：

$$\begin{aligned} & \frac{Fll_*}{g^2 A A_*} \lambda^4 + \frac{1}{g} \left[\frac{l_*}{g A A_*} \left\{ \frac{fwQ_o}{\Omega_o} \left(\frac{H_o - k_* Q_o^2}{\Omega_o} - \frac{bQ_o^2}{gS_o^3} + \mu \right) + 2Q_o I \left(\frac{l}{2gS_o^2 A} + \frac{kl_*}{A_*} + \frac{k_* l}{A} \right) \right\} \right] \lambda^3 \\ & + \left[\frac{bfwQ_o^2 F}{g^2 S_o^3 \Omega_o} \left\{ \frac{l}{A} (H_o - 3k_* Q_o^2) - \frac{2kQ_o^2 l_*}{A_*} \right\} + \frac{2Q_o F}{g} \left(\frac{l}{2gS_o^2 A} + \frac{kl_*}{A_*} + \frac{k_* l}{A} \right) \left\{ \frac{fwQ_o (H_o - k_* Q_o^2)}{\Omega_o^2} + \mu \right\} \right. \\ & \left. + 4kQ_o^2 F I \left(\frac{1}{2gS_o^2} + k_* \right) + \frac{I}{g} \left(\frac{l}{A} + \frac{l_*}{A_*} \right) \right] \lambda^2 \\ & + \left[\left\{ \frac{fwQ_o (H_o - k_* Q_o^2)}{\Omega_o^2} + \mu \right\} \left\{ 4kQ_o^2 F \left(\frac{1}{2gS_o^2} + k_* \right) + \frac{1}{g} \left(\frac{l}{A} + \frac{l_*}{A_*} \right) \right\} \right. \\ & \left. + 2Q_o I \left(\frac{1}{2gS_o^2} + k + k_* \right) + \frac{bfwQ_o^3}{gS_o^3 \Omega_o} \left\{ 2kF(H_o - 3k_* Q_o^2) - \frac{1}{g} \left(\frac{l}{A} + \frac{l_*}{A_*} \right) \right\} \right] \lambda \\ & + 2Q_o \left[\frac{bfwQ_o}{2gS_o^3 \Omega_o} \left\{ H_o - (2k + 3k_*) Q_o^2 \right\} + \left(\frac{1}{2gS_o^2} + k + k_* \right) \left\{ \frac{fwQ_o (H_o - k_* Q_o^2)}{\Omega_o^2} + \mu \right\} \right] = 0. \dots\dots\dots(5.8) \end{aligned}$$

(5.8) を $C_4 \lambda^4 + C_3 \lambda^3 + C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda + C_0 = 0$ と簡記するならば、安定条件としては Routh の規範により、
 $C_4 > 0, C_3 > 0, C_2 > 0, C_1 > 0, C_0 > 0 \quad C_1 C_2 C_3 > C_0 C_3^2 + C_1^2 C_4 \dots\dots\dots(5.9)$

† 単働調圧水槽の時は F は勿論一定常数である。変断面調圧水槽の場合には F としては平衡状態に於ける調圧水槽中の自由水面の面積を採れば良い。

この安定条件を満足する様に調圧水槽の断面積を定むべきである。

§6 安定条件の簡単化

(5.9) の安定条件は記号を原に戻せば頗る繁雜なものとなつて實用には不向きとなる。よつて適當に簡単化を試みる：

水圧管路の長さ l_* 及び抵抗係数 k_* は、夫々隧道の總延長 l 及び抵抗係数 k に比して一般に可成り小であるから、前二者を後者に比して無視して $l_*, m_* \rightarrow 0$ と置く。又恒に成立するものを除いて (5.9) を記せば、(5.9) は次の如くとなる：

$$\frac{bfwQ_0^3}{gS_0^3\Omega_0} \left(2kFH_0 - \frac{l}{Ag} \right) > \left(\frac{fwQ_0H_0}{\Omega_0^2} + \mu \right) \left(\frac{2kQ_0^2Fg}{S_0^2} + \frac{l}{Ag} \right) + 2Q_0I \left(\frac{1}{2gS_0^2} + k \right) \dots\dots\dots(5.10)$$

及び

$$\frac{2Q_0^4kH_0fw^3}{g^2\Omega_0S_0^4} \left(\frac{b}{S_0} + \frac{1}{\Omega_0} \right) \left\{ 2kI + \frac{lH_0fw}{Ag\Omega_0} \left(\frac{b}{S_0} + \frac{1}{\Omega_0} \right) \right\} F^2$$

$$+ \frac{Q_0^2}{gS_0^2} \left\{ 4k \left(\frac{1}{2gS_0^2} + k \right) I_2 + \frac{4lkH_0fw}{Ag} \left(\frac{b}{S_0} + \frac{1}{\Omega_0} \right) I + \frac{l^2H_0f^2w^2}{g^2Q_0^2A^2} \left(\frac{b}{S_0} + \frac{1}{\Omega_0} \right) \left(\frac{H_0}{\Omega_0} - \frac{Q_0^2b}{gS_0^3} \right) \right\} F^4$$

$$+ \frac{U}{Ag} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2gS_0^2} + k \right) I + \frac{lfw}{AgQ_0} \left(\frac{H_0}{Q_0} - \frac{Q_0^2b}{gS_0^3} \right) \right\} > 0. \dots\dots\dots(5.11)$$

之が所要の安定条件となる。

§7. Thoma の條件について

Thoma の條件の誘導の際には、水車等の回転部分の回転慣性が考慮されて居らず、且水車は等速回転をして居るものと考えて居る。従つて本報に於て $I \rightarrow 0$ 、及び感度常数 $a, b \rightarrow \infty$ (水車が等速回転をなす故) と置いた場合が Thoma の條件に相当する。事実、

$$I \rightarrow 0, \quad a, b \rightarrow \infty \dots\dots\dots(5.12)$$

を(5.12) に代入すれば、直ちに安定条件として

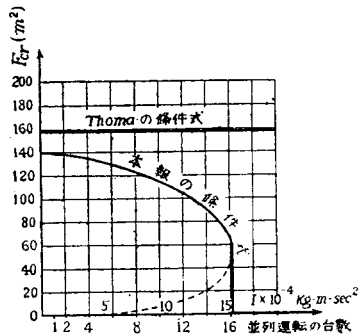
$$2kFH_0 - \frac{l}{Ag} > 0, \quad \therefore F > \frac{l}{2kH_0Ag} \dots\dots\dots(5.15)$$

を得、(5.12) を (5.11) に代入しても矢張り (5.13) と同一の條件を得る。而して (5.13) は Thoma の條件に他ならない。

§8. 數値計算例

- 隧道 { 總延長： 2,786.80 m,
- { 内 径： 5.00 m,
- 水圧管路 { 延長： 63.76 m,
- { 内径： 2.90 m,
- 落差： 35.57 m,
- 流量： 10.02 m³/sec,
- 水車發電機効率： 86%
- 水車發電機の GD² = 370,000 kg-m²
- 隧道の損失係数 $k = 0.001288 \text{ sec}^2/\text{m}^5$
- 水圧管の " $k_* = 0.00306 \text{ sec}^2/\text{m}^5$
- { 水車入口に於ける圧力水頭 $h_0 = 0.6H_0$

圖-7



以上の資料に基づき、本報理論と Thoma の條件式とによつて安定上必要な調圧水槽最小限断面積 F_{cr} を、回転部分の慣性能率 $I (= GD^2/4)$ に対してプロットすれば 圖-7 の如くとなる。此の圖からも、 $I \rightarrow$ 大となると、調圧水槽の断面積は如何に小でも安定性に関する限りは差支えない様になる狀況が觀察される。