

この結果を図に示せば 図-6 の通りである。図中点線は撓角法にて求めた値、実線は Gran Olsson が Exponential Integral を用いて正確に解いた値である。分割数を 10 にすれば更に精密な値を得られることは勿論であるが、極めて大まかな分割の場合に於ても、撓角法に依る解法は正解に比して大して遜色を認めない。

5. 結 言

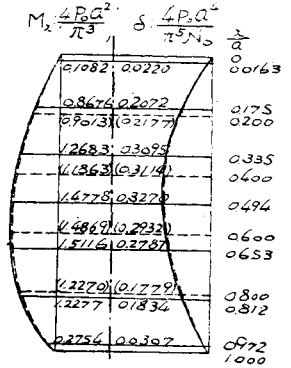
以上示した如く撓角法に依る解法は、版剛度及荷重強度が x 又は y はのいづれかみの函数である場合には、それらが如何なる函数形を採らうとも、いずれの場合にも適用される。又なんら高等なる函数表を必要としない点も便利である。但し計算式誘導に於ける相対する 2 辺単純支持の仮定に拘束されることは免れない。即ち本計算例の場合では版剛度、荷重強度の一定なる方向に於ては単純支持でなければ、この方法は使用出来ない欠点がある。目下周辺の支持条件に拘束されない撓角法について研究を進めているので他日発表したいと考えている。

なお本文を草するに当つては京大教授小西博士の御指導を賜り、計算には同土木工学教室職員石原清忠君の助力を仰いだ。こゝに附記して厚く感謝の意を表す次第である。

引用文献

- (1) Gran Olsson: Ing-Archiv; 5(1934) 5.363.
- (2) 成岡昌夫: 撓角撓度法に依る 1 方向連続版の解法; 土木学会誌に近く発表の予定
- (3) Timoshenko; Theory of Plates and Shells; p.127

図-6



実線: G. Olsson の精密計算
点線: 著者の近似計算

PAPER LOCATION についての 2, 3 の基礎的問題の図式解法について

正員 大 島 太 市*

ON THE DIAGRAMATIC SOLUTION OF THE SOME FUNDAMENTAL PROBLEMS ON THE PAPER LOCATION

Taichi Oshima, C. E. Member

Synopsis; Proper plans can hardly be formulated in accordance with paper location unless the location is carried out on a definite principle. Moreover, a systematic paper plan is necessary for increasing the utility of the diagrams.

In this paper, solutions of the problems arising in connection with the determination of the shortest route are given as examples, and methods are described with respect to typical topographic conditions, of graphical determination of the shortest route on a definite gradient and of the shortest route with the length of line being given.

要 旨 Paper Location を行う場合、一定の方針のもとでなすのでなければ、適正な計画を行うことは仲々困難である。又、図面を充分利用し、その利用価値を高めるためにも系統的な図上の計画が必要である。本文は、その 1 例として路線の最短なもの決定する時に、起つてくる問題、例えばある一定の勾配の下に最短路をきめる場合、又は、路線長をおさえて最短路をきめる場合などの問題を代表的な地形について図式に求める方法について吟味したものである。

* 東京大学第二工学部

目次

1. 概説
2. 簡単な実例
3. 定められた勾配で、三角形断面の山をこす最短路の決定 (山の稜線が互に平行である場合)
4. 前例において、山を越す場合、上り下りの路線長が同じ距離になるようにして最短路線を決定する
5. 三角錐の形状をした山をこえ、而も與えられた勾配 γ を持つ最短路線の決定

§1. 概説

一般に、現地について工事の計画を立てるに先立つて、先ず一応地図の上で計画を作り、その計画が経済的に、又技術的に適当であるか否かを比較研究して見る事が広く行われる。特に、新しい路線の選定、貯水池の問題、流域の算定、切盛土量の推定等に於ては、図上の計画が工事の重要な第1歩となるものである。

本篇に於ては、特に路線選定に当つて、その路線が最短のものとなるためには、如何なる道を選べばよいかと言う問題について、基本的な例について、図式による解法を説明した。

最短路線を求める場合、地形的に或は技術的にある条件が附加せられる事が多い。例えば、その路線の勾配がある与えられた値以下でなければならぬとか、勾配線の長さが一定限度でなければならぬとか、の場合である。これらの条件を満足し、而も最短の路線の位置を決定する事は、数学的にも解く事は出来るが、数学的な解法によると、非常に煩雑になる場合が多い。こゝでは、専らこれらの問題を図式に解く方法について述べたいと思う。

図式による解は、最短路線の決定にだけ利用されるものでなく、同様の方針によつて、種々の問題を解く事が出来る。特に、写真測量に利用することによつて、こゝにのべる方法は一層有意義なものとなるであらう。地上写真測量に関する研究の一環として、図上計画を図式解法に基く場合の基礎問題を取扱つて見たものである。

§2. 簡単な実例

例1 平らかな地域をはさんで、その両側に丘があり、その丘の斜面上の2点をつなぐ最短路の位置を決定する。

立体面上の2点間の最短経路即ち測地線は、その面を展開した時、常に2点を結ぶ直線となる。従つて、与えられた面上の2点間の測地線を求むるには、先ずその面を展開し、展開図に於て、2点を結ぶ直線を作り、これの投影を求むればよい。

今この例の場合には図-1 に示すようになる。図-1 に於て、両側の斜面は e_1Ee_2 , f_1Ff_2 で示されている。これを水平跡 e_1E および f_1F を中心として水平面まで回転したとき、両平面上にある点 $P(p, p')$ および $Q(q, q')$ は、夫々 P_0Q_0 にくる。 P_0Q_0 を結び、各面の水平跡との交点 R, S を定めれば、求むる最短路線は R, S を通る。故に pR, S, q' を結べば、これが最短路線になる。 $p'R, q'S$ はその水平投影である。

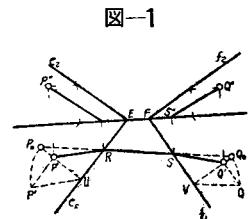


図-1

例2 三角形断面の丘を超え、その両側の平坦部にある2地点を結ぶ最短路線を決定する。この場合、丘の稜線は、互に平行であるとする。

図-2 はこの場合の展開図の作り方、および求めた最短路線の位置を示したものである。三角形断面の稜線 g' は g_0 に、 f_1 は f_1^0 に展開され、従つて、他側の点 Q は Q_0 に移動される事になる。 Q_0 がきまれば、 PQ_0 を結び、その e_1, g_0 及び f_1^0 との交点を求めこれらを投影線 g' 及び f_1 上に移せば、求むる最短路の位置を決定する事が出来る。

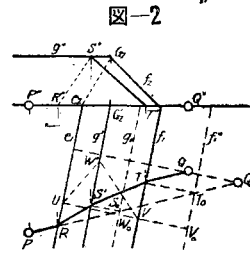
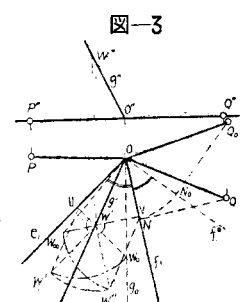


図-2

例3 中間に在る山が、三角錐形となり、山頂の稜線が傾いている場合、その両側の平坦地の2地点を結ぶ最短路を求むる。

この場合には、角錐の尖端 O と、両側の2点 P, Q を結ぶ線 POQ で、平面が切り離されておとし、 O を中心として、三角錐を平面に展開する。その要領は図-3 に示す如くである。かくして稜 g' が g_0 に、 f_1 が f_1^0 に、 Q が Q_0 に来たとき PQ_0 を結び展開された各稜線との交点を求めこれを投影面にうつせばこれより最短路線の位置を決定する事が出来る。



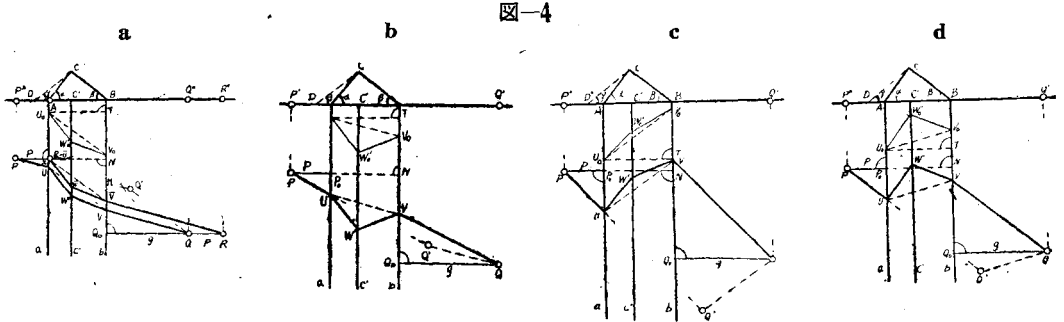
以上、三つの例題に於てのべた方法は、如何なる地形に対しても応用する事が出

来る。両側の面も平面である必要はなく、中間の地形も任意のものでよい。

§3. 定められた勾配で、三角形断面の山を越す最短路の決定(山の稜線が互に平行である場合)。

今、山を越す時の勾配が γ で而も両側の2点を結ぶ最短路線を決定する。勿論この場合 γ は山腹の側斜 α 及び β よりは小さい値である。

勾配が γ であるような路線で山を越すには4通の方法がある事がわかる。図-4, a~dは、各々の場合を示したものである。この場合、 $U_0W'_0=V'_0V_0=C'D \angle CDC'=\gamma$ である。勾配が一定であれば、丘上の路線長は常に一定であるから、最短路線を求むるためには、点P及びQから、稜線a及びbに到る平坦地上の距離を最小にすればよい。そのために、山をおりたゞみ山をこすためにずれた距離だけ補正した時のQのしめる位置Q'を求め、PQ'を結べば、これが平坦地に於ける最短距離となり、稜線aとの交点が、最短路の越える位置を示すことになる。



従つて、4つの場合に従つて、Qより U_0V_0 に平行線を引き $QQ'=U_0V_0$ としてQ'を求め、PQ'を結べばよい。

更に図-4(a)に於て、 QQ_0 を延長し、 $QR=p=PP_0$ となる位置にRを求める。先に求めた最短路線 $UW'VQ$ に平行に $P_0W'VR$ をとれば、この路線は、稜線a上の点 P_0 から点Rに到る最短路となり、PQの間の最短路と同じ長さとなる。従つて、山の片側の点からの最短路を求める代りに、稜線a上の点から他の側の点を結ぶ最短路を考えれば、これを一般の場合に展開する事が出来る。この事は、後の問題を取扱う上に利用される。

又、山腹の路線がジグザグコースをとる場合にも、勾配が一定であり、山の傾斜が一定である限り、この方法によつて定めた路線が最短のものとなる。

§4. 前例に於て、山を越す場合、昇り下りの路線長が同じ距離になるようにして最短路線を決定する。

(1) 一般的考察

3に於て述べたように、片側の点Pが稜線a上にある場合について考えて、これを一般化する事が可能である。点Pより稜線bに立てた垂線の足Nをとり、 $NQ_0=d$ であるとする。又稜線cから稜線aおよびbに到る距離を夫々 m, n とする。最短路線を求める場合4通りの方法のある事は、前の例に於て見たと同じである。今その一つの場合 図-4(a) について考える事にする。

\vec{NQ}_0 の方向を正にとれば、この線上に投影される $\vec{UW} \vec{WV}$ は何れも正とする事が出来る。図-5に於て、 $\gamma = \beta < \alpha$ の場合を考えれば、 $\vec{W}_0V_0 \perp b$ となり、この時の路線 PW_0V_0Q は、一つの極限値を示すことになる。

次に、任意の路線 $PWVQ$ をとり($PW_0=V_0V_0$) $PW=VW=x$ であるとし、 $NV=e, NV_0=e_0=\sqrt{n^2-m^2}$ 、路線の全長を y とすれば、 y の値は次式で示すことが出来る。

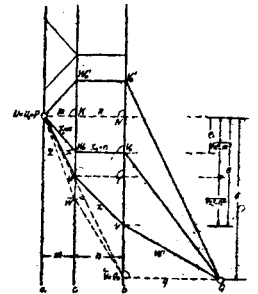
$$y = 2x + \sqrt{q^2 + (d - \sqrt{x^2 - m^2} - \sqrt{x^2 - n^2})^2} = 2x + \sqrt{q^2 + (d - e)^2} \dots \dots \dots (1)$$

故に、 y を d' 及び w'' の2つ

$$d' = 2x \quad w'' = \sqrt{q^2 + (d - \sqrt{x^2 - m^2} - \sqrt{x^2 - n^2})^2} \dots \dots \dots (2)$$

に分けて考える。この中で $\sqrt{x^2 - m^2}$ 及び $\sqrt{x^2 - n^2}$ は、各々任意に正負の符号をとる事が出来る。従つて、最短路をきめる場合にも、4通りの方法が生ずるわけである。この4通りの中で最短のものを選ぶ事が必要である。

式-1を直角標系に図示すれば、8次曲線となり、 x のある値について、 y の値は八つあるが、この場合、必要



とする根は実のもののみであり、且つ $x_0 \leq x \leq \pm \infty$ の範囲が必要となる。但し $x_0 = n$ とする。

この範囲内の x の如何なるに対して y が最小となるか、又その時の y の値が如何程であるかを調べる事が必要である。

この問題を図式で解くために $q=0$ か又 $q>0$ はの場合、および $d>0$ か $d=0$ の場合について区別しておく事が必要である。先ず、 $q>0$ $d>0$ の場合について考える事とする。この場合にも、 $d \geq e_0$ の何れかによつて次の四つの場合が生じてくる。

I	$y = 2x + \sqrt{q^2 + (d - \sqrt{x^2 - m^2} - \sqrt{x^2 - n^2})^2}$	参照 図-4 (a)
II	$y = 2x + \sqrt{q^2 + (d - \sqrt{x^2 - m^2} + \sqrt{x^2 - n^2})^2}$	" " (b)
III	$y = 2x + \sqrt{q^2 + (d + \sqrt{x^2 - m^2} - \sqrt{x^2 - n^2})^2}$	" " (c)
IV	$y = 2x + \sqrt{q^2 + (d + \sqrt{x^2 - m^2} + \sqrt{x^2 - n^2})^2}$	" " (d)

この式で、I 及び II、III 及び IV は、 W_0V_0 及び $W'_0V'_0$ の両側に夫々増大して行くのであるから、I、II および III、IV は、 W_0V_0 $W'_0V'_0$ に於て連続したものとなる。従つて、この二つの群については、それぞれ 1 群にまとめて考察する事が出来る。

$d \leq e_0$ の場合 w'' は x の増大するに従つて増大する。従つて、 $x = x_0$ の場合に、 y の値が最小となる。

$d > e_0$ の場合 q の値は $x = \bar{x}$ の時最小となる。 $x > \bar{x}$ に対しては y は常に増大し $\bar{x} \leq x \leq +\infty$ の範囲に於ては $x = \bar{x}$ の時に最小値をもつ。 $x = \bar{x}$ の値は、簡単に作図から求める事が出来る (図-5 参照)。

II の場合には次の場合が生ずる。

$x > n$ に対しては、常に $\sqrt{x^2 - m^2} > \sqrt{x^2 - n^2}$ であり、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - m^2} - \sqrt{x^2 - n^2}) = 0$ となるから、 $\sqrt{x^2 - m^2} - \sqrt{x^2 - n^2} = d$ を満足する x の値を x とする時 $x > \bar{x}$ なる時、 w'' は $\sqrt{q^2 + d^2}$ に近づく。 \bar{x} の値は \bar{x} を求めたと同じ方法により図式的に容易に決定出来る。故に II に於ては $d < e_0$ の場合に $x_0 \leq x \leq \bar{x}$ の範囲に y の最小値を求める事が出来る。 $d > e_0$ の場合には $x = x_0$ の時最小となる。

III 及び IV の場合については、 $\sqrt{x^2 - m^2} - \sqrt{x^2 - n^2}$ は x が増大すると共に 0 に近づく。又 $\sqrt{x^2 - m^2} + \sqrt{x^2 - n^2}$ は x と共に常に増大する故、 $x_0 \leq x < +\infty$ に対しては、I 及び II と類似の関係が容易に生ずる。

(2) 前例に於ける 8 次曲線の吟味

今、図-5 に示すような場合、即ち $d > e_0$ の場合について y と x との関係を 8 次曲線について調べて見る。

m, n, d, q について適当な値を代入して、I 及び II の場合について曲線を描いて見る (図-6 参照)。この図は便宜上、縦軸に $\frac{y}{2} = \frac{w''}{2}$ 、 $\frac{w''}{2}$ の値をそれぞれ x の値によつて表わした。 $\frac{w''}{2}$ は原点を通り、 x 軸と 45° をなす直線である。

II の場合 $\lim_{x \rightarrow \infty} w'' = \sqrt{q^2 + d^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - m^2} - \sqrt{x^2 - n^2}) = 0$ であるから、曲線 w'' 又は y に対する漸近線は

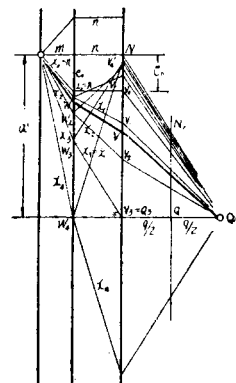
$$\left. \begin{aligned} w'' &= \sqrt{q^2 + d^2} \\ y &= 2x + \sqrt{q^2 + d^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

故に、この 2 曲線の漸近線は共に $\frac{\sqrt{q^2 + d^2}}{2}$ (点 S) に於て y 軸と交わり w'' の漸近線は x 軸に平行な直線、 y の漸近線は x 軸と 45° の傾きをなす直線となる。

I の場合 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{w''}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{q^2}{x^2} + \left(\frac{d}{x} - \sqrt{1 - \frac{m^2}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{n^2}{x^2}}\right)^2} = 2$

即ち、この場合には、曲線 $\frac{w''}{2}$ の漸近線は x 軸に対して 45° の傾をなし、曲線 $\frac{y}{2}$ に対する漸近線は、 $\frac{w''}{2}$ の漸近線の縦距に $\frac{w''}{2}$ の値を加えたものである。そしてこれらの漸近線は 縦軸上の点 T に於て相交わる。OT を決定するためには、図-6 (a) を参照して、 x の非常に大きい値に対しては、縦座標 y は近似的に $NV_i + Q_0V_i$ によつて示す事が出来る。この場合 NV_i と Q_0V_i は、近似的に $2x$ と $2x-d$ となる。故に、曲線 y の漸近線の方程式は $y_1 = 4x - d$ となり曲線 $\frac{y}{2}$ の漸近線は $\frac{y_1}{2} = 2x - \frac{d}{2}$ によつて表わす事が出来る。故に、図-6 (b) に於ける $OT = -\frac{d}{2}$ とな

図-6 (a)



る。即ち $\frac{y_1}{2}$ の漸近線は、例えば x_1 に対して縦距 $2x_1$ にとつた点 J と原点 O を結ぶ直線と平行になるから、 $|OT| = \frac{1}{2}d$ にとつた点 T から OJ に平行線を引く事によつて決定する事が出来る。

図-6 から知り得るように $x = \sqrt{d^2 + m^2}$ に選べば、曲線 I と II の y 及 w'' の値は相等しくなる。

(3) 最短路の決定

$d > e_0$ なる場合 x が $x_0 \leq x \leq \bar{x}$ なる範囲に於て、曲線 I が最小値を与える。この点を x_m とすれば $x = x_m$ に於ては $\frac{dy}{dx} = 0$ でなければならない。

式-2 により、 $x = x_0 = n$ に於ては、 $\frac{dw''}{dx} = -\infty$ 従つて $\frac{dy}{dx} = -\infty$ となり、又 $x = \bar{x}$ に於ては、 $\frac{dw''}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = 2$ となる。又 $\frac{dy}{dx}$ は x の連続函数であるから \bar{x} 及び x_0 の間に於ては $\frac{dy}{dx} = 0$ を満足する x の値は少くとも一つは必ずなければならない。この点で y は最小となる。

今式-2 (v) を次のように書きあらためる。即ち

$$\frac{dw''}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(d - \sqrt{x^2 - m^2} - \sqrt{x^2 - n^2})^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{x^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{x^2}}} \right]$$

横軸 x が、 $x = x_0 = n$ から $x = \bar{x}$ まで増大すると、右辺の第1項および第2項は次第に小さくなり、この間に於て、唯一度だけ $\frac{dw''}{dx} = -2$ 又 $\frac{dy}{dx} = 0$ となる事が出来る。

故に、以上のべた事から $d > e_0$ に対しては函数 y の値が、唯一度だけ $x_0 \leq x \leq \bar{x}$ の間に於て最小の値をとり得る。

(4) III, IV の場合、最短路線を求める方法

この場合にも、I および II におけると全く同様にして、最短路を決定する事が出来る。図-7 (a) (b) は、この場合の $y/2$, $w'/2$, $w''/2$ の曲線を示したものである。

III の場合、II と同様に $\lim_{x \rightarrow \infty} w'' = \sqrt{q^2 + d^2}$ であるから、曲線 III の漸近線は、式-3 で表わす事が出来る。

IV の場合には、I と同じ方法によつて漸近線を決定する事が出来、その方程式は

$$y/2 = 2x + \frac{d}{2}$$

となり、 T_1 点 $(OT_1 = \frac{d}{2})$ に於て縦軸と相交わり、 OJ に平行な直線として、漸近線を決定する事が出来る。かくして、 $y/2$ の曲線を描き、 $\frac{dy}{dx} = 0$ なる点を求め、 y の最小値を確定する事が出来る。

(5) 2, 3 の特別な場合について

今まで述べてきたのは $q \geq 0$ 且 $d > e_0$ についてであつた。次に特別な場合として、今まで考察しなかつたものについて検討して見る。

$d = e_0 = \sqrt{n^2 - m^2}$ の場合

この時、I, II の場合には、 $x = n$ に於て y が最小値 $2n + q$ となりこれが凡ての場合の最小値である事は容易に知る事が出来る。

図-8 を参照して、式-2 (b) より

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{dw''}{dx} = -\frac{n}{q} \left[-1 + \lim_{x \rightarrow n} \frac{d - \sqrt{x^2 - m^2}}{\sqrt{x^2 - n^2}} \right] = +\frac{n}{q}$$

図-6 (b)

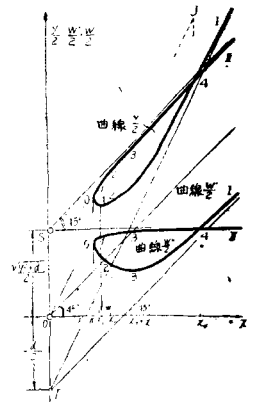
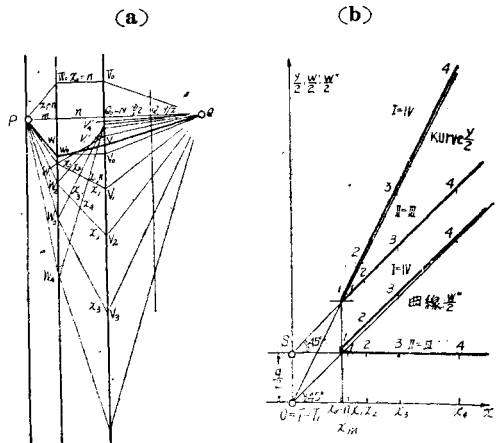


図-7



$$\therefore \lim_{x \rightarrow n} \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{n}{q}$$

$q=0, d>0$ の場合には

$$\text{双曲線は } (y-2x \mp d)^2 = 4(x^2 - m^2)$$

$d=0, q>0$ の場合には

$$\text{双曲線は } (y-2x)^2 = q^2 + 4(x^2 - n^2)$$

となる。図-8 及び 9 は、この二つの場合を示したものである。

図-8

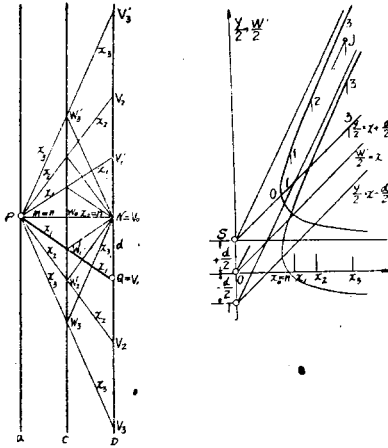
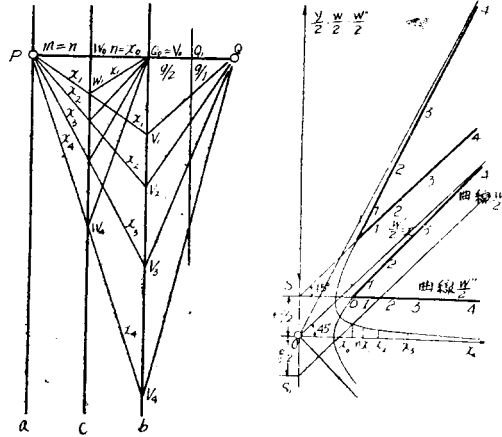


図-9



従つて、この場合には、 y 及 w'' の $x=n$ に於ける切線は $q/2 - n^2/2q$ なる点で共に縦軸に交わり、又、I 及び II の曲線の切線は $x=n$ 点で一致する。

$d=0$ の場合

この場合には、I と IV, II と III の各場合、 x の値如何に拘らず常に相等しい。

$m=n$ の場合

$q>0; d>0$; であれば、8 次曲線は、各場合に応じて

$$\text{直線 } y = 2x \pm \sqrt{q^2 + d^2} \dots (\text{II 及び III})$$

$$\text{4 次曲線 } y = 2x \pm \sqrt{q^2 + (d \mp 2\sqrt{x^2 - m^2})^2} \dots (\text{I 及び IV})$$

に分けられる。

§5. 三角錐の形状をした山をこえ、而も興えられた勾配をもつ最短路線の決定

(1) 基本の解

中間にある三角錐の形状をした山は、その1側面を地面に接しており、他の2側面は水平面と α, β の角をなしているものとする。かつ、両側の稜 a, b のなす角が γ であるとする。稜 a を x 軸に選び、三角錐の頂点 O に於て、 x 軸に直角の方向に z 軸をとる。 z 軸は、山と反対側の方向を正とする。

与えられた点 P から、山を一定勾配でこえ、他の側の稜線 b 上の点 V に達する路線の中で最短のものを求める。 P 点の座標は $OU_0 = x_0 = l, U_0P = z_0 = p > 0$ とする。簡単のために与えられた角の間には次の関係があるものとする。

$$\nu < \alpha < 90^\circ, \nu < \beta < 90^\circ, \nu > \gamma_0$$

γ_0 は稜線 c の勾配である。

図-10 に示したように、山をこす路線を選ぶのに四つの場合が生ずる。例えば $U_1WV_1, U_2WV_1, U_2WV_2$ の如くである。然し、ここでは U_1WV_1 の場合についてだけ考える事とする。

稜線 a 上の点 U_i から山をこえる長さ w'' は、勾配が一樣であれば x に比例すると思ふ可い。故に、 $w'' = U_iW_i + W_iV_i = \varepsilon \cdot x$ で表わすことが出来る。茲に、 ε は常数であり、 $U_iW_i = W_iV_i$ である。又この場合 P の x 座標は常に正である。そうでなければ PO は常に求むる進路となるからである。

図-10

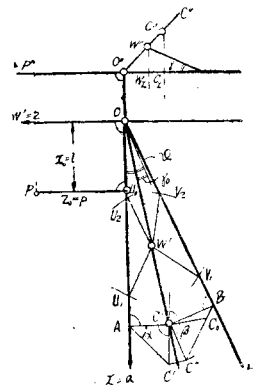


図-11を参照して、次の様な作図を行つて見る。Pから稜辺*b*に到る種々の路線について、その*a*線上の点*U_i*から*z*軸に垂線を立て、*z*軸の正の方向に*W''=P_iU_i=PU_i*なる如くに*P_i*をとる。これを反対の側に延長し、*W''=2U_iW*となる点*T_i*を定める。この場合点*T*の軌跡は、0点を通り、*x*軸となす角が*τ*であるような直線である。こゝに、*τ*は $\tan\tau=\varepsilon$ によつて決定される値である。

これに対し、*P_i*の軌跡は

$$z^2=(w_i)^2=(l-x)^2+p^2 \quad \text{である。}$$

今、*U₀*を原点とし、*x, z*軸に平行な座標軸 ξ, η を考えると *P_i*の軌跡は

$$\eta^2-\xi^2=p^2$$

となり、点 *P_i*の軌跡は、*U₀*を原点とし、頂点を*P*とする等辺双曲線となり、路線全体の長さは、*P_i T_i*により $x=OU_i$ の函数として示すことが出来る。

更に、 $x \geq l$ の場合には *w'* および *W''* は *x*の増大するに従つて増大する。故に、最短路線の決定に当つては、*OP*に相当する点 *P_n*と*P*との間にはさまれた双曲線が問題となる。

*P_n*に於ける双曲線の切線が*x*軸となす角 τ_n が τ より大きい場合には、*P*と*P_n*の間に於て、*t*に平行な切線が必ず一つ存在する。この点を \bar{P} とし、これに相対するも上の点を \bar{T} とすれば $\bar{P}\bar{T}$ は、求むる最短の路線となる。

$\tau_n \leq \tau$ であれば、*PO*は最短の路線となる。

(2) 路線の決定の際の詳細な吟味

点 *P_n*の位置及び *P_n*に於ける双曲線の切線は点 *P*の位置にのみ関係するものであるから、点 *P*が如何なる位置のときに $\tau_n > \tau$ であり又 $\tau_n \leq \tau$ であるかを吟味しよう。

常に $\tau_n < 45^\circ$ であるから、若し、 $\tau \geq 45^\circ$ であれば、 $\tau > \tau_n$ は当然なりたつ故に、今 $\tau < 45^\circ$ 即 $\varepsilon < 1$ の場合についてのみ考える事とする。

$\tau < 45^\circ$ であれば与えられた点 *P*を通る等辺双曲線上の点 *P_n*における切線は、図式に容易にきめる事が出来る。次に逆に点 \bar{P} の位置について吟味して見よう。 $\tau < 45^\circ$ である場合には $\tau = \tau_n$ になるように、点 *P_n*を通り直線 *t*に平行線を引く事が出来る。故に、任意の点 *P_n*から $t_n \parallel t$ なる平行線 *t_n*を引いて、次に $OG = OP_n$ になるように*x*軸上に*G*を定める。切線と *P_nG*とのなす角 $\delta = 45^\circ - \tau$ を他の側に移し、*x*軸との交点を *U₀*とする。*U₀*に於ける垂直線上に $OP = OP_n$ によつて *P*をきめれば、点 *P*は *P_nO*が最短距離となる場合の双曲線の頂点となる。

*z*軸上のすべての点についてこの事がなり立つから、点 *P*の軌跡は、*x*軸と σ なる角 ($\sigma = \tan\tau$) をなす直線である。但し直線 *s*は、 $\tau \leq 45^\circ$ なるときのみ可能である。*s*は *t*の種々の位置について容易に画く事が出来る。

このようにして *s*をきめる事が出来れば、 $\tau < 45^\circ$ なる場合に於ては、点 *P*が直線 *s*と*x*軸の間にある限り *P_n*に於ける切線と*x*軸とのなす角 τ_n に対して $\tau_n > \tau$ の関係がなり立つ。然し、*z*軸と直線 *s*の間に点 *P*がある場合には、両直線上の点も含んで $\tau_n \leq \tau$ となる。

今、 $\tau_n > \tau$ なる範囲内に点 *P*が与えられ、これに応ずる双曲線がきまると、*t*に平行な切線を、切点 \bar{P} に於て見出すことが出来る。これによつて最短路線が決定される事になる。

この問題を解析的にとけば次のようになる。

今与えられた勾配 γ を有する任意の路線 $y = PU_i + (U_i W_i + W_i V_i) = w' + w''$ は、 $PU_0 = p \quad OU_0 = l$ とすれば

$$y = \sqrt{p^2 + (l-x)^2} + \varepsilon \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ なる条件より}$$

$$-\frac{l-x}{\sqrt{p^2 + (l-x)^2}} + \varepsilon = 0 \quad \text{或は} \quad x = l \mp \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$\varepsilon \geq 1$ (即ち $\tau \geq 45^\circ$) の場合には *x*は実数とはならない。 $\varepsilon < 1$ の場合、 $0 < x \leq l$ の間に於てのみ、次の解が存在する。

$$\bar{x} = l - \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

図-11

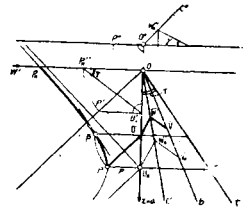
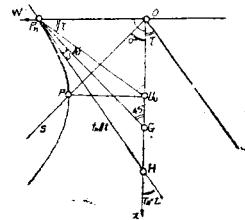


図-12



若し、 $l^2 \geq \frac{e^2 - p^2}{1 - e^2}$ であるか、 $\cos^2 \sigma = \frac{l^2}{p^2 + l^2} \geq e^2$ なる場合上述の成立する範囲がこれにあたる事になる。

(3) 2点 が 両側の水平面に与えられる場合

前節に於てのべたと同じ地形の場合で、その両側の水平面にある2点 P, Q を結ぶ最短路線について考えて見よう。勿論、この場合にも、路線は一定の勾配をもつものでなければならない。

図-13 を参照して、点 P, Q の座標を次のようにきめる。即ち、 P 点については、前節と同じ xz 座標系をとる。 Q 点については、 P 点と対称に稜辺 b を x_1 軸に、これに直角な方向に z_1 軸ととり、 P, Q 共に、 z の値は正となるように、 z 軸の方向を定める。

今 P, Q はその z の値が夫々 p, q であり、且つ P, Q を結ぶ直線は三角稜の底面を切断する位置にあるものとする。このような場合においては、 P, Q の中何れか一つの点、例えば P 点から、 x 軸に垂線をおろせば、その足 U_0 は x 軸の正の位置にこななければならない。もし、そうでなければ、稜角の大きさ如何に拘らず PQ を結ぶ直線は稜底を横断しないことになるからである。

前と同じように、三角稜の各々の面のなす角の間には、次の関係があるものとする。

$$\nu < \alpha < 90 \quad \nu < \beta < 90 \quad \nu > \gamma_0$$

又、最短路を求める方法が4種類あるが、その中の U_1V_1 の方向にあるものを考える事とする (図-10 参照)。従つて、求める進路が稜辺と交わる位置を U, V とすれば、直線 UV は U_1V_1 に平行でなければならない。図-13 に於て、 U_0 を通り U_1V_1 に平行な直線 $U_0\bar{V}$ を引き、稜線 b と \bar{V} に於て交わらせる。簡単のため、点 \bar{V} の x_1 座標、 $x_1 = O\bar{V}$ は、 V_0 の x の値 m より大きいものとする。そうでない時は、 P と Q をとりかえて考えればよい。

このように仮定すると、求むる最短路の a 稜上の点は、必ず直線 OU_0 上になければならない。それは、より大きい座標値をもつ点 V_i に到る路線に対しては、 U_0V_i が大きくなればなる程、全体の路線長が長くなるからである。

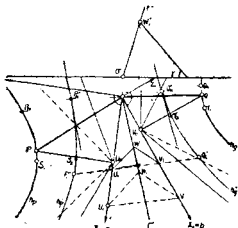
次に問題となるのは、頂点 O を迂回した路線 POQ が最短路になるか、山を越えて行く道が最短路となるか、と言う事である。又、もし、山を越す場合、その路線の位置を決定する事である。この問題を解くためには、更に作図法によらなければならない。

点 P から稜 a 上の点 V_i に到る路線を一つ考える。 U_i から V_1U_1 に平行な直線を引き、その上に PU_i に等しく P' をとつたものとする。このようにして定めた P' の軌跡は、前述したと同様に、等辺双曲線をなす。今これを $h_{p'}$ で表わすこととする。この双曲線は、稜辺 a を ξ' 軸、 U_0 を通り U_1V_1 に平行な直線を η' 軸とした時、方程式 $\xi'^2 - \eta'^2 = p^2$ によつて表わすことが出来る。即ち、前節に於ける等辺双曲線を斜交軸 ξ', η' に変換したものと考える事が出来る。この場合、双曲線 $h_{p'}$ の主軸は中心 U_0 を通り、 $P_0'J$ に平行な直線となり、漸近線の方は $P_0'G, P_0'H$ の方向となる。茲に、 J, G, H は、図-14 に示すように、 U_0 を中心とし、 U_0P_0 を半径とする円と、 P_0U_0 の延長との交点を J 、稜 a との交点を G および H としたものである。

これより P_i の双曲線は、容易に描く事が出来る。又、 Q に対する Q_i' の軌跡を示す双曲線 $h_{q'}$ も、全く同様の方法によつて描く事が出来る。

又、図-13 に於て、与えられた勾配 γ をもつ路線 $U_iW_iV_i$ は $\lambda \cdot U_iV_i$ にて表わすことが出来る。但し λ は1より大きい常数である。故に、 $P_i'U_i', Q_i'V_i'$ を $1/\lambda$ に縮小して考える事にする。さうすれば、双曲線 $h_{p'}$ 及 $h_{q'}$ は、 P_i'', Q_i''

図-15



に対する双曲線 $h_{p''}, h_{q''}$ に変換される (図-15)。

又この新しい双曲線に対する漸近線は、当然、鈍角をなす。即ち、この変換で漸近線の方が、ある角だけ変化し、又、その切線のある角だけ変化する事がわかる。この事はあとですぐ利用される。

(4) 最短路線決定

双曲線 $h_{p''}$ の任意の点 P_i'' から、双曲線 $h_{q''}$ 上の点 Q_i'' まで U_1V_1 に平行な直線を引けば、 $P_i''Q_i''$ は、勾配 γ である路線 $PU_iW_iV_iQ$ の $1/\lambda$ 倍に相当する。故に、最短路線を求めるには、双曲線 $h_{p''}, h_{q''}$ の間にはさまれたこのような路線の中

図-13

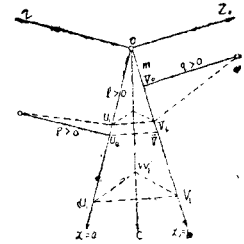
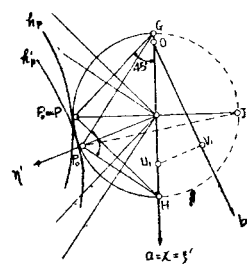


図-14



で最短のもの求めればよい事になる。然し、この場合、 U は OU_0 上に来なければならない。

さて、こゝで前の場合と同じように2つの場合が生ずる。即ち、最短路が O を通るか否かと言う事である。もし、 O を通れば、 POQ は最短路となる。この問題は 図-15 から容易に知る事が出来る。即ち、 O を通り U_1V_1 に平行な直線と双曲線 h_p'', h_q'' との交点 P_n'', Q_n'' における双曲線の切線を引いて見る。この場合、切線が下方に向つて開くか、或は収斂するかに従つて決定される。今、これらの切線が、下方に行くに従つて開くならば、 U_1V_1 に平行に引いた $P_i''Q_i''$ は、 $P_n''Q_n''$ の位置から下にくるに従つて次第に増大し、決して減少する事はない。従つて、 $P_n''Q_n''$ は最短路となる。

又、点 P_n'', Q_n'' に於ける切線が収斂するか、或は平行な場合には、 OU_0 の範囲内に於て U_1V_1 に平行な直線 $P_i''Q_i''$ を最小にする位置が必ず一つある(図-16)。この最小にする位置は次のようにして決定する事が出来る。この条件を満足する点 $P_i''Q_i''$ に於て、夫々の双曲線に引いた切線は、互に平行でなければならない。

今、この位置をきめるために、双曲線 h_p'' の頂点に於ける切線 f を描く。 U_1V_1 に平行な $P_i''Q_i''$ に対して、切線 f と、双曲線の間にはさまれた長さだけ $P_i''Q_i''$ を延長してとり、それが D_i であるとする。各 $P_i''Q_i''$ について、同じことを繰返すことによつて、 D 点の軌跡が容易に決定出来る。これを K -曲線とする。次に、 K -曲線に対して、切線 f に平行な切線 G を描き、その切点を D とする。然るときは、 D を通り、 U_1V_1 に平行な直線が、 $P_i''Q_i''$ の求むる位置、即ち最短路をきめる \overline{PQ} を与える位置を示し、これより最短路 $PUW'VQ$ を決定することが出来る。

この問題と同様にして、与えられた点 P より最短路が POQ であるためには、 Q 点が如何なる範囲になければならないか、その範囲を決定すること出来る。

例えば、 $U_1W_1'V_1$ が U_1O+V_1O より大であるような場合には Q が如何なる位置であつても常に POQ は最短路となる。然し、その他の場合には、 POQ が最短となるための Q の範囲が定まつてくる。ここでも、§5、(2) で求めた直線 S に相当する O を通る直線がその限界を示すことになる。たゞ、直線 S は、 P_n'' および Q_n'' に於ける両双曲線に引いた切線が互に平行になる事からきめられる。

(5) 計算による解法

今、前述の問題を解析的に解いて見よう。任意の路線について考えるに、その全長は次の式で表わされる。

$$y = P_iU + (U_iW_i' + W_i'V_i) + V_iQ$$

$$= \sqrt{p^2 + (l-x)^2} + \mu \cdot x + \sqrt{q^2 + (m-\nu x)^2}$$

こゝに、 p, q, l, m は 図-13 に示したように与えられた長さであつて、一定の常数である。独立変数 x は、 OU_i を表わし、 μ, ν はそれぞれ $\frac{U_iW_i' + W_i'V_i}{OU_i}$ 及び $\frac{OV_i}{OU_i}$ の比を表わすものとする。

これを x, y の直交座標系にて表せば、曲線 K と密接な関係のある4次曲線となり、 y の最小値をきめるためには $\frac{dy}{dx} = 0$ をとかなければならない。然し、この条件は複雑な8次方程式となり、従つて、解析的にこれをとく事が極めて困難となる。この点図解法の便利さがあるわけである。

図-16

