

る。

然るにこの前提は事實ではない。 $\tau=f(\sigma)$ と於て σ が大になるにつれて τ も大になる場合は、 τ/q の最大値は1より小なるある一定値になる。然るに σ_1/σ_2 は0~1に變化し得るのである。従つて Kammüller の方法はすべての應力状態に成立する一般性を有しないのである。

次に Kammüller が、破壊の包絡線として用ひてゐるのは Mohr の説に従つて一つの理想的な場合を假定してゐるのであるが、この曲線はコンクリートの性質に従つて種々に變化するものと考へられ、筆者はこれを實驗的に求めようとするのである。

以上の二點が Kammüller との相異點の主たる點である。

(昭 23. 9 受付)

鐵道線路に於ける道床破壊速度

正 員 高 橋 憲 雄

The vibration of the (railway) track ballast

By Norio Takahashi, C. E. Member

要 旨： 列車が或る速度で走つて居ると道床には振動が起る。此の振動は速度が早くなる程大きくなる。列車が通つたために重力の加速度と相等しい上方加速度が道床に生じた場合、此の列車速度をその軌道に於ける、その車輪の道床破壊速度とする。

本文は昭和 11 年の實驗をもととして理論並に實驗上の結果を述べたものである。

Summary.

Vibration is produced in the ballast when a train travels. The greater the velocity, the stronger the vibration. The writer defines the "Ballast Breaking Velocity" of the wheel on the track as that velocity of the train which produces an upward acceleration of the ballast equal to the downward acceleration of gravity. The article explains the theory and its development from experiments made in 1936.

目 次

- | | |
|------------------------------|--|
| 1. 緒 言 | 8. 時間に對して正弦變化を行ふ、等速移動荷重に對する減衰を考えた彈性基礎上の桁 |
| 2. 道床の上下動に關する實驗 | 9. 實驗に對する變動荷重に依る計算 |
| 3. 道床振動實驗 | 10. 高速度列車に對する計算 |
| 4. 等速一定移動荷重に對する減衰を考えた彈性基礎上の桁 | 11. 計算に依つて求めた道床破壊速度 |
| 5. 實驗に對する一定荷重に依る計算 | 12. 加速度比から求めた道床の破壊速度 |
| 6. 小周期振動の實驗 | 13. 荷重變化の同期の一定な場合 |
| 7. 道床振動の上下動周期 | 14. 結 論 |

1. 緒 言

列車が道床破壊速度以上の速度で走ると、道床砂利に重力の加速度以上の上方加速度が働くので、道床砂利が撥上る。然も此の場合、道床には上下動と同時に水平加速度も働いて居るので、撥上つた砂利は横移動をする。即ち撥出されるわけである。此のために道床砂利が施工基面に崩れ出す。道床砂利に重力の加速度以上の上方速度が働くのであるから、車輪も浮き上り勝になる。車輪にも道床砂利と同様に水平力が働いて居るから脱線の危険も生ずることになる。

道床破壊速度は此處に新しく設けたものであるが、列車速度に關する問題として、各種の軌道に對して充分調

べる必要があるものとする。

2. 道床の上下動に関する實驗

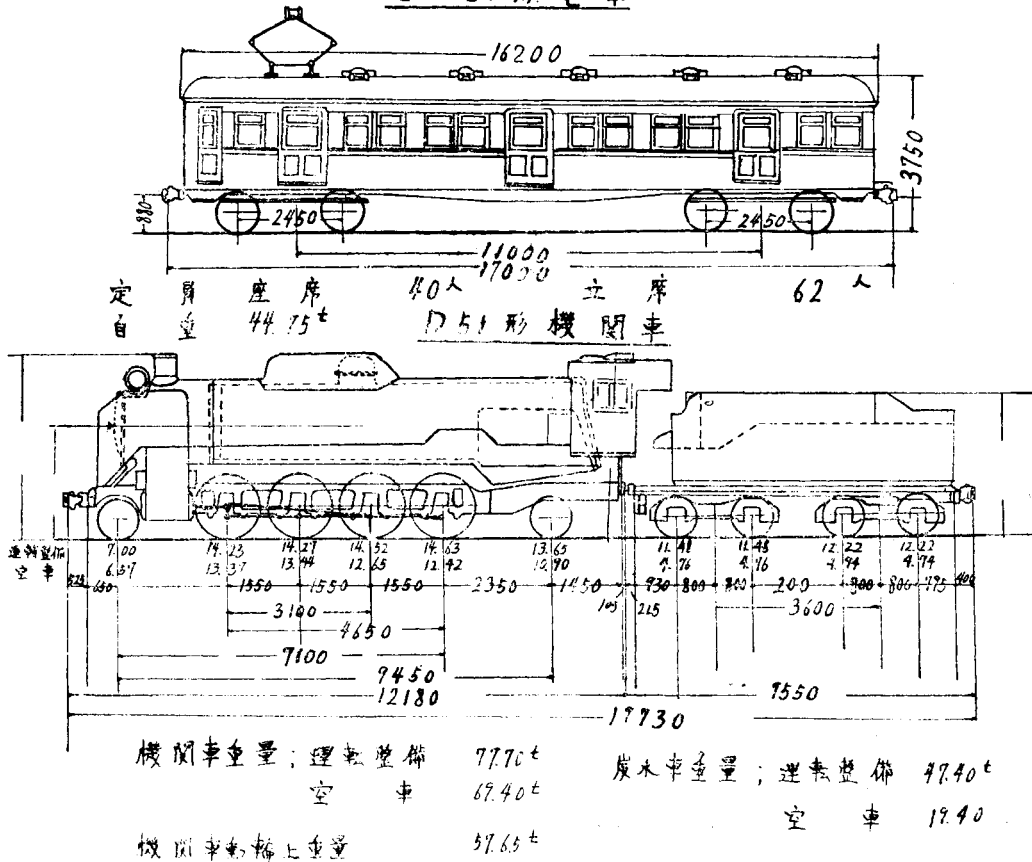
列車が走つた場合の道床に生ずる上下動を知るために、次に示す様に總武線下總中山驛附近で昭和11年2月實驗を行つた。

道床の上下動は砂利を枕木下端まで掻出して、軌條の下に動かない桁を渡して、此の桁と道床の相對的の動きを記録せしめた。加速度を測るのには自己振動周期 0.05 sec の石本萩原加速度計を用いて之れを道床の上に置いた。加速度比は道床振動加速度比測定裝置に依つて測つた。列車速度は 100 m の列車走行時間から求めた。

之れに依つて見ると、圖一に示したモハ 31 形電車の臺車が走る場合、その第 1 車輪下の沈下より第 2 車輪下の沈下は常に大きく、その平均沈下の比は 1.14 となつた。之れを考へて見ると、彈性基礎にある桁を、減衰力を考へて解いて、實驗に示された第 1 車輪下の最大沈下 2.8 mm 第 2 車輪下の最大沈下 3.2 mm を示す基礎係數及減衰係數を求めた。

圖一

モハ 31 形電車



3. 道床振動實驗

測定年月 昭 11. 2. 11~13.

測定場所 總武線 19 k 107~110 m 上り線軌道中心

測定車輛 モハ 31 形式電車ボギー臺車輪重 5,400 kg

軸距 2.45 m

軌 條 37 kg/m 枕木間隔 71 cm

實驗番號	測 定 日	列車速度 km/h	第1車輪下 最大沈下 mm	第2車輪下 最大沈下 mm	最大上 方 加 速 度 g	最大加 速 比
1	11	60	2.2	2.7	0.24	.015 4
2	12	64	2.4	2.5	0.24	.013 1
3	12	56	2.9	3.4	0.24	.015 4
4	12	58	2.9	3.3	0.33	.013 1
5	13	46	3.2	3.4	0.20	.013 1
6	13	49	2.8	3.0	0.20	.015 4
7	13	60	2.5	3.1	0.28	.013 1
8	13	60	2.9	3.3	0.15	.012 6
9	13	66	2.8	3.3	0.33	.018 0
10	13	58	2.7	3.1	0.15	.012 6
11	13	56	3.1	3.3	0.15	.013 1
12	13	58	3.0	3.5	0.19	.010 4
13	13	56	2.9	3.2	0.17	.018 0
平 均		57	2.8	3.2	0.22	.014 1

4. 等速一定移動荷重に對する、減衰を考えた彈性基礎上の桁

軌條を彈性基礎上に置かれた無限に長い桁と考え、桁上の一を原點とし、水平軸を X 軸とし右向きに正を取り、沈下を η とし上方を正とする。時間を t と置く。

$$\begin{aligned}
 E &= \text{ヤング係數} & I &= \text{桁斷面の慣性モーメント} \\
 k &= \text{基礎係數} & c &= \text{有効減衰係數} \\
 g &= \text{重力の加速度} & M &= \text{有効桁重量}
 \end{aligned}$$

とする。

軌道に於ける減衰力は複雑なものであると思われるけれども、式の取扱いに便利な様に粘性減衰として考えて、之れを有効減衰係數とした。

桁重量は單位長さ當り桁重量に、桁と同時に動く附屬物を加味したものを考えて有効桁重量とした。

桁の運動方程式は桁の彎曲に依る力、彈性基礎の反力、慣性力、減衰力を考えて、

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + k\eta + \frac{M}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + c \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

と置く、此處で、

$$p^2 = \frac{h}{EI}, \quad 2n = \frac{c}{EI}, \quad m = \frac{M}{EIg}$$

とすれば上の式は、

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial \eta}{\partial t} + P^2 \eta = 0$$

となる。此の解を、

$$\eta = \sum e^{\alpha(x-vt)} \{A \cos \beta(x-vt) + B \sin (x-vt)\}$$

と置く、但し

$$Q = \text{走行荷重} \quad v = \text{荷重の走る速度}$$

とし、A, B は境界條件に依つて定まる積分常數とする。之れを微分して微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \cdot \Sigma e^{\alpha(x-vt)} \{ (\alpha^4 A + 4\alpha^3 \beta B - 6\alpha^2 \beta^2 A - 4\alpha \beta^3 B + \beta^4 A) \\ & \quad + mv^2 (\alpha^2 A + 2\alpha \beta B - \beta^2 A) \\ & \quad + 2nv (-\alpha A - \beta B) + P^2 A \} \cos \beta(x-vt) \\ & \quad + \{ (\alpha^4 B - 4\alpha^3 \beta A - 6\alpha^2 \beta^2 B + 4\alpha \beta^3 A + \beta^4 B) \\ & \quad + mv^2 (\alpha^2 B - 2\alpha \beta A - \beta^2 B) \\ & \quad + 2nv (-\alpha B + \beta A) + P^2 B \} \sin \beta(x-vt) = 0 \end{aligned}$$

となる。此の式が任意の x 及 t に對して成立するために各項の係數を零と置くこと次の2式を得る。

$$\begin{aligned} A(\alpha^4 - 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 + mv^2 \alpha^2 - mv^2 \beta^2 - 2nv\alpha + P^2) \\ = B(-4\alpha^3 \beta + 4\alpha \beta^3 - 2mv^2 \alpha \beta + 2nv\beta) \\ B(\alpha^4 - 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 + mv^2 \alpha^2 - mv^2 \beta^2 - 2nv\alpha + P^2) \\ = -A(-4\alpha^3 \beta + 4\alpha \beta^3 - 2mv^2 \alpha \beta + 2nv\beta) \end{aligned}$$

之れから次の式を得る。

$$\begin{cases} \alpha^4 - 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4 + mv^2 \alpha^2 - mv^2 \beta^2 - 2nv\alpha + P^2 = 0 \\ -4\alpha^3 \beta + 4\alpha \beta^3 - 2mv^2 \alpha \beta + 2nv\beta = 0 \end{cases}$$

此の聯立方程式から α, β の4組の實根 $\alpha, \beta; \alpha, -\beta; -\alpha, \delta; -\alpha, -\delta$ を求めることが出来る。即ち解は

$$\begin{aligned} \eta = & Ae^{\alpha(x-vt)} \cos \beta(x-vt) + Be^{\alpha(x-vt)} \sin \beta(x-vt) \\ & + Ce^{-\alpha(x-vt)} \cos \delta(x-vt) + De^{-\alpha(x-vt)} \sin \delta(x-vt) \end{aligned}$$

となる。A, B, C, D は境界條件に依つて定まる新しい積分常數である。又 α, β, δ は正數を取るものとす。積分常數を定めるため今

$$x-vt \leq 0$$

の場合の η を η_1 と置いて $x \rightarrow -\infty$ の時

$$\eta_1 \neq \pm \infty \quad \text{とすると} \quad C = D = 0$$

となる。又

$$x-vt \geq 0$$

の場合 η を η_2 と置いて $x \rightarrow \infty$ の時

$$\eta_2 \neq \pm \infty \quad \text{とすると} \quad A = B = 0$$

となる。即ち

$$\eta_1 = Ae^{\alpha(x-vt)} \cos \beta(x-vt) + Be^{\alpha(x-vt)} \sin \beta(x-vt) \quad a-vt \leq 0 \text{ の場合}$$

$$\eta_2 = Ce^{-\alpha(x-vt)} \cos \delta(x-vt) + De^{-\alpha(x-vt)} \sin \delta(x-vt) \quad x-vt \geq 0 \text{ の場合}$$

となる。此の式に於て $x-vt=0$ の場合

$$\eta_1 = \eta_2$$

即ち荷重の下の沈下は兩式で計算したものが相等しく出ると置けば、

$$A - C = 0$$

となる。又 $x-vt=0$ の場合

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = \frac{\partial \eta_2}{\partial x}$$

即ち、荷重下の桁の傾斜は兩式で計算したものが相等しく出ると置けば、

$$\alpha A + \beta B - (-\alpha C + \delta D) = 0$$

となる。次に $x-vt=0$ の場合

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2}$$

即ち、荷重下の桁の曲率半徑は兩式で計算したものが相等しいと置いて

$$\{(\alpha^2 - \beta^2)A + 2\alpha\beta B\} + \{(\alpha^2 - \delta^2)C - 2\alpha\delta D\} = 0$$

となる。最後に $x-vt=0$ の場合

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{\partial^3 \gamma_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \gamma_2}{\partial x^3} \right) = 0$$

即ち、集中荷重 Q が此處にかゝつて居るとして、

$$-\{(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)A + (3\alpha^2\beta - \beta^3)B\} + \{(-\alpha^3 + 3\alpha\delta)C + (3\alpha^2\delta - \delta^3)D\} = -\frac{Q}{EI}$$

となる。此處に A, B, C, D を求めるために4つの式が求められたので、之れから常數を計算することが出来る。

即ち

$$\begin{aligned} A=C &= -\frac{4\alpha^3}{32\alpha^6 + 8mv^2\alpha^4 + n^2v^2} \frac{Q}{EI} \\ B &= -\frac{\alpha(4\alpha^3 + nv)}{\beta(32\alpha^6 + 8mv^2\alpha^4 + n^2v^2)} \frac{Q}{EI} \\ C &= -\frac{\alpha(4\alpha - nv)}{\delta(32\alpha^6 + 8mv^2\alpha^4 + n^2v^2)} \frac{Q}{EI} \end{aligned}$$

茲するに、解は

$$\gamma_1 = Ae^{\alpha(x-vt)} \cos \beta(x-vt) + Be^{\alpha(x-vt)} \sin \beta(x-vt) \quad x-vt \leq 0 \text{ の場合}$$

$$\gamma_2 = Ce^{-\alpha(x-vt)} \cos \delta(x-vt) + De^{-\alpha(x-vt)} \sin \delta(x-vt) \quad x-vt \geq 0 \text{ の場合}$$

此處に

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\left[-\frac{mv^2}{6} + \frac{1}{12} \sqrt{\{(m^3v^6 - 36mv^2P^2 + 54n^2v^2) \right.} \right.} \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{(m^3v^6 + 36mv^2P^2 + 54n^2v^2)^2 - (m^2v^4 + 12P^2)^3} \right\} \right.} \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \sqrt{(m^3v^6 - 36mv^2P^2 + 54n^2v^2) \right.} \\ &\quad \left. - \sqrt{(m^3v^6 - 36mv^2P^2 + 54n^2v^2)^2 - (m^2v^4 + 12P^2)^3} \right] \end{aligned}$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{mv^2}{2} - \frac{nv}{2\alpha}} \quad \delta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{nv}{2\alpha}}$$

$$A = -\frac{4\alpha^3}{(32\alpha^6 + 8mv^2\alpha^4 + n^2v^2)} \frac{Q}{EI} \quad B = -\frac{\alpha(4\alpha^3 + nv)}{\beta(32\alpha^6 + 8mv^2\alpha^4 + n^2v^2)} \frac{Q}{EI}$$

$$D = -\frac{\alpha(4\alpha^3 - nv)}{\delta(32\alpha^6 + 8mv^2\alpha^4 + n^2v^2)} \frac{Q}{EI}$$

γ_1, γ_2 が此の様に書けば、之れを t で2度微分して加速度を求めることが出来る。

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} = v^2(\alpha^2 A + 2\alpha\beta B - \beta^2 A) e^{\alpha(x-vt)} \cos \beta(x-vt)$$

$$+ v^2(\alpha^2 B - 2\alpha\beta A - \beta^2 B) e^{\alpha(x-vt)} \sin \beta(x-vt)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2} = v^2(\alpha^2 A - 2\alpha\delta D - \delta^2 A) e^{-\alpha(x-vt)} \cos \delta(x-vt)$$

$$+ v^2(\alpha^2 D + 2\alpha\delta A - \delta^2 D) e^{-\alpha(x-vt)} \sin \delta(x-vt)$$

之等に A, B, D を代入して整理すれば

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} = \frac{2v^2\alpha^3(4\alpha^2 + mv^2)}{32\alpha^6 + 8mv^2\alpha^4 + n^2v^2} \frac{Q}{EI} e^{\alpha(x-vt)} \cos \delta(x-vt)$$

$$+ \frac{v^2\alpha^2(\alpha^4 + mv^2\alpha^2 - mv^2\beta^2 + 2\beta^4)}{\beta(32\alpha^6 + 8mv^2\alpha^4 + n^2v^2)} \frac{1}{EI} e^{\alpha(x-vt)} \sin \beta(x-vt)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2} = \frac{2v^2\alpha^3(4\alpha^2 + mv^2)}{32\alpha^6 + 8mv^2\alpha^4 + n^2v^2} \frac{Q}{EI} e^{-\alpha(x-vt)} \cos \delta(x-vt)$$

$$= \frac{v^2 \alpha^6 (6\alpha^4 + mv^2 \alpha^2 - mv^2 \delta^2 + 2\delta^4)}{\delta(32\alpha^6 + 8mv^2 \alpha^4 + n^2 v^2)} \cdot \frac{Q}{EI} e^{-\alpha(x-vt)} \sin \beta(x-vt)$$

となる。

次に $\alpha^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{nv}{2\alpha}$ の場合

此の場合には $\beta=0$

となるので η_2 は求められるが η_1 は次の様に求める。

$$\begin{aligned} \beta &\rightarrow 0 \quad \text{を考えると} \\ \sin \beta(x-vt) &= \beta(x-vt) \\ \cos \beta(x-vt) &= 1 \end{aligned}$$

と置くと η_1 の式は

$$\eta_1 = \left\{ -\frac{4\alpha^3}{32\alpha^6 + 8mv^2 \alpha^4 + n^2 v^2} + \frac{\alpha(4\alpha^3 + nv)(x-vt)}{32\alpha^6 + 3mv^2 \alpha^4 + n^2 v^2} \right\} \frac{Q}{EI} e^{\alpha(x-vt)}$$

或は nv の項を整理すると

$$\eta_1 = \left\{ -\frac{4\alpha^3}{(6\alpha^2 + mv^2)^2} + \frac{x-vt}{6\alpha^2 + mv^2} \right\} \frac{Q}{EI} e^{\alpha(x-vt)}$$

となる。又之れを t で 2 度微分すれば加速度が求められる。

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = \left\{ \frac{2v^2 \alpha(4\alpha^2 + mv^2)}{(6\alpha^2 + mv^2)^3} + \frac{v^2 \alpha^2(x-vt)}{6\alpha^2 + mv^2} \right\} \frac{Q}{EI} e^{\alpha(x-vt)}$$

更に $\alpha^2 + \frac{mv^2}{2} < \frac{nv}{2\alpha}$ の場合

η_2 は求められるが、 η_1 は前の式では β が虚数になる、依つて

$$\beta' = \sqrt{\frac{nv}{2\alpha} - \alpha^2 - \frac{mv^2}{2}} \quad B' = \frac{\alpha(4\alpha^3 + nv)}{\beta'(32\alpha^6 + 8mv^2 \alpha^4 + n^2 v^2)} \cdot \frac{Q}{EI}$$

と置くと

$$\begin{aligned} \beta &= i\beta' \\ \cos \beta(x-vt) &= \cos i\beta'(x-vt) = \frac{1}{2} \{ e^{\beta'(x-vt)} + e^{-\beta'(x-vt)} \} \\ \sin \beta(x-vt) &= \sin i\beta'(x-vt) = \frac{1}{2i} \{ e^{\beta'(x-vt)} - e^{-\beta'(x-vt)} \} \\ B &= \frac{B'}{i} \end{aligned}$$

となるので、 η_1 の式に之等を代入すると次の様になる。

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A e^{\alpha(x-vt)} \frac{1}{2} \{ e^{\beta'(x-vt)} + e^{-\beta'(x-vt)} \} \\ &\quad - \frac{B}{i} e^{\alpha(x-vt)} \frac{1}{2i} \{ e^{\beta'(x-vt)} - e^{-\beta'(x-vt)} \} \\ \therefore \eta_1 &= \frac{A+B'}{2} e^{(\alpha+\beta')(x-vt)} + \frac{A-B'}{2} e^{(\alpha-\beta')(x-vt)} \end{aligned}$$

之れを 2 度微分すれば加速度が求められる。

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = v^2 (\alpha + \beta')^2 \frac{A+B'}{2} e^{(\alpha+\beta')(x-vt)} + v^2 (\alpha - \beta')^2 \frac{A-B'}{2} e^{(\alpha-\beta')(x-vt)}$$

5. 實驗に對する一定荷重に依る計算

$$E = 210\,000\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$Q = 5\,400 \text{ kg}$$

$$C = 2.3 \text{ kg sec/cm}^4$$

$$m = 0$$

$$I = 952 \text{ cm}^4 \quad 37 \text{ kg/m 軌條}$$

$$k = 88 \text{ kg/cm}^2$$

$$v = 1\,580 \text{ cm/sec} = 57 \text{ km/h}$$

諸數値を以上の様に取り。此處に有効荷重は軸重に對して小さいと思われるので、此の様な低速度に對して無視した、以上から計算すると η 及 $\frac{f^2\eta}{\partial t^2}$ が求まる。

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -0.297e^{0.010\ 35x-16.36t} \cos(0.007\ 96x-12.58t) \\ &\quad + 0.467e^{0.010\ 35x-16.36t} \sin(0.007\ 96x-12.58t) \\ \eta_2 &= -0.297e^{-0.010\ 35x+16.36t} \cos(0.012\ 28x-19.40t) \\ &\quad - 0.199e^{-0.010\ 35x+16.36t} \sin(0.012\ 28x-19.40t) \\ \frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2} &= 159.7e^{0.010\ 35x-16.36t} \cos(0.007\ 96x-12.58t) \\ &\quad + 173.6e^{0.010\ 35x-16.36t} \sin(0.007\ 96x-12.58t) \\ \frac{\partial^2\eta_2}{\partial t^2} &= 158.8e^{-0.010\ 35x+16.36t} \cos(0.012\ 28x-19.40t) \\ &\quad - 167.3e^{-0.010\ 35x+16.36t} \sin(0.012\ 28x-19.40t) \end{aligned}$$

之等を 245 cm の軸距を置いて加え合すと、電車のボギー臺車が通つた場合の沈下と、上下加速度とが求められる。之れに依つて第1車輪下の最大沈下は 2.8 mm 第2車輪下は 3.2 mm となつたので、此の地點の基礎係数と減衰係数は

$$k=88\text{ kg/cm}^2 \quad c=2.3\text{ kg sec/cm}^4$$

と考える。此の場合の上方最大加速度は

$$61\text{ cm/sec}^2$$

である。實驗に依つて求めた上方最大加速度は

$$220\text{ cm/sec}^2$$

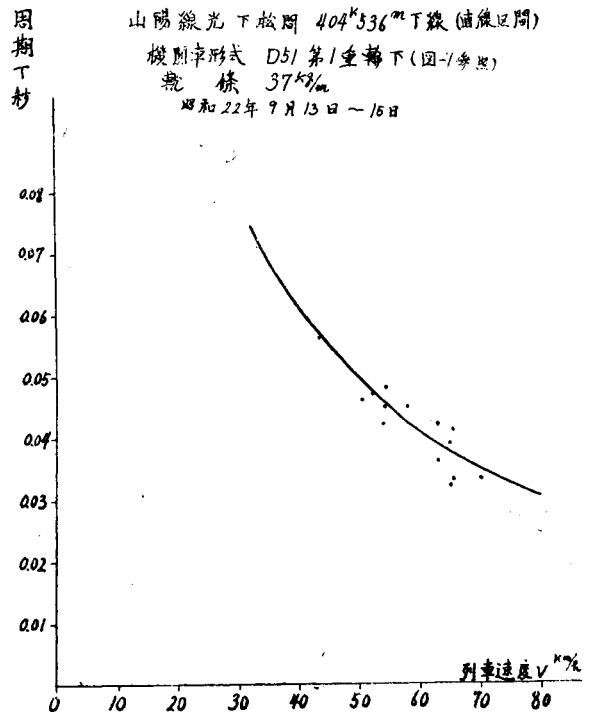
であるので、此の計算に依つて出したものとは著しい差が認められる。

6. 小周期振動の實驗

車輪が通過する時生ずる沈下は、車輪の一つ毎に一つの單調な沈下曲線を示すのではなくて其の間に細かく見ると更に小さい振幅の小周期振動が、數多く存在していることが發見された。之れは上下動だけでなく、左右動にも前後動にも同じ様に表われてゐる。之れを測つた一つの實驗として昭和 23 年 9 月山陽線光、下松間で自己振動周期 0.08 sec の石本加速度計による上下振動を圖-2 に示す。

之れに依ると列車速度が早くなる程、小周期振動の周期は小さくなるものが多い様に思はれる。即ち其の平均點を通つて列車速度と周期とは逆比例するといふ曲線を求めると、此の小周期振動の周期と列車速度との積は 69cm となつた。此の長さは此の區間の規定された枕木間隔 71 cm と近いものである。小周期振動の 1 周期の間に車輪の走る距離が枕木間隔と相等しいとすれば、次の様に考えることが出来る。軌條は一樣な彈性基礎上にあるものと考えたが實際にはそうでなくて枕木に依つて或る間隔毎に支え

圖-2



られて居るので、此の上を走る車輪は滑らかに走るのではなく、上下の波状運動をしながら進んで行く、此の事は軌條が細くなるに随つて著しく表はれて来る。

車輪が枕木の上を通る毎に上下の波状運動をしながら走つて行けば、其處に上方或いは下方の遠心力が作用する。此の慣性力が發生すれば之れに依つて更に波状運動の振幅は増大される。又此の様な力が常に働けば軌條面に波状の磨耗が出来ることも考えられる。

其處で周期的の變動をしながら走る荷重を考えることとした。

7. 道床振動の上下動周期

8. 時間に對して正弦變化を行う、等速移動荷重に對する、減衰を考えた彈性基礎上の桁

此の問題を解くため、先に用いた微分方程式

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial \eta}{\partial t} + P^2 \eta = 0$$

を用い解として

$$\eta = \Sigma e^{\alpha(x-vt)} [A \cos\{\beta(x-vt) + \epsilon t\} + B \sin\{\beta(x-vt) + \epsilon t\}]$$

と置く、但し、A, B は積分常數

$\epsilon =$ 荷重變化の周期を示す常數で、之れは速度に對して、或る函數になつて居ても一定數であつても良い。但し位置、時間に依つては變化しないものとする。

之れを微分して微分方程式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \Sigma e^{\alpha(x-vt)} [& \{(\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + mv^2\alpha^2 - mv^2\beta^2 + 2mv\epsilon\beta - m\epsilon^2 - 2nva + P^2)A \\ & + (4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 + 2mv^2\alpha\beta - 2mv\epsilon\alpha - 2nv\beta + 2n\epsilon)B\} \cos\{\beta(x-vt) + \epsilon t\} \\ & + \{ \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + mv^2\alpha^2 - mv^2\beta^2 + 2mv\epsilon\beta - m\epsilon^2 - 2nva + P^2 \} B \\ & - (4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 - 2mv^2\alpha\beta - 2mv\epsilon\alpha - 2nv\beta + 2n\epsilon)A \} \sin\{\beta(x-vt) + \epsilon t\}] = 0 \end{aligned}$$

となる。此の式が任意の x 、及 t に對して成立するためには各項の係數を零としなければならない。

即ち

$$\begin{aligned} & (\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + mv^2\alpha^2 - mv^2\beta^2 + 2mv\epsilon\beta - m\epsilon^2 - 2nva + P^2)A \\ & - (4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 + 2mv^2\alpha\beta - 2mv\epsilon\alpha - 2nv\beta + 2n\epsilon)B \\ & (\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + mv^2\alpha^2 - mv^2\beta^2 + 2mv\epsilon\beta - m\epsilon^2 - 2nva + P^2)B \\ & - (4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 - 2mv^2\alpha\beta - 2mv\epsilon\alpha - 2nv\beta + 2n\epsilon)A \end{aligned}$$

之を整理して次の式を得る。

$$\begin{cases} \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + mv^2\alpha^2 - mv^2\beta^2 + 2mv\epsilon\beta - m\epsilon^2 - 2nva + P^2 = 0 \\ 4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 - 2mv^2\alpha\beta - 2mv\epsilon\alpha - 2nv\beta + 2n\epsilon = 0 \end{cases}$$

此の聯立方程式の下の方に $-i$ を掛けて上の式と加え合して整理すると

$$(\alpha - i\beta)^4 - m\{v(\alpha - i\beta) + i\beta\}^2 - 2nv(\alpha - i\beta) + (P^2 - 2in\epsilon) = 0$$

となつて、此の式は $(\alpha - i\beta)$ に關する 4 次方程式であるから、之れは一般に解くことが出来て、その根は 4 組ある。依つて此の 4 組の根を求めて、之れを實數部と虚數部とに分けて考えると、求める α, β が實數であるためには、實數部は α に、虚數部は $-i\beta$ にならなければならない。従つて此處に 4 組の解を求めることが出来る。之等を

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), (\alpha_4, \beta_4)$$

とする。之等の根の内 α の負の根を特に γ と置き、之れに對する β, A, B の値を夫々 δ, C, D と置けば、 $(x-vt)$ が無限大となつた場合 η は有限であると考えて解を次の様に置くことが出来る。

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \Sigma e^{\alpha(x-vt)} [A \cos\{\beta(x-vt) + \epsilon t\} + B \sin\{\beta(x-vt) + \epsilon t\}] & x-vt \leq 0 \text{ の場合} \\ \eta_2 &= \Sigma e^{\gamma(x-vt)} [C \cos\{\delta(x-vt) + \epsilon t\} + D \sin\{\delta(x-vt) + \epsilon t\}] & x-vt \geq 0 \text{ の場合} \\ x-vt=0 \text{ の場合} & \eta_1 = \eta_2 \text{ と置く} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Sigma A - \Sigma C = 0 \\ \Sigma B - \Sigma D = 0 \end{cases}$$

$$x-vt=0 \text{ の時 } \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} \text{ と置く}$$

各係数を零と置いて

$$\begin{cases} \Sigma(\alpha A + \beta B) - \Sigma(\gamma C + \delta D) = 0 \\ \Sigma(\alpha B - \beta A) - \Sigma(\gamma D - \delta C) = 0 \end{cases}$$

$$x-vt=0 \text{ の時 } \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x^2} \text{ と置くと同様に}$$

$$\begin{cases} \Sigma\{(\alpha^2 - \beta^2)A + 2\alpha\beta B\} - \Sigma\{(\gamma^2 - \delta^2)C + 2\gamma\delta D\} = 0 \\ \Sigma\{(\alpha^2 - \beta^2)B + 2\alpha\beta A\} - \Sigma\{(\gamma^2 - \delta^2)D - 2\gamma\delta C\} = 0 \end{cases}$$

$x-vt=0$ の時

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{\partial^3 \gamma_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \gamma_2}{\partial x^3} \right) = (Q_1 \cos et + Q_2 \sin et)$$

即ち、正弦變化をする集中荷重 ($Q_1 \cos et + Q_2 \sin et$) が ($x-vt$) にかゝつて居るとすると、

$$-\Sigma\{(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)A + (3\alpha^2\beta - \beta^3)B\} + \Sigma\{(\gamma^3 - 3\gamma\delta^2)C + (3\gamma^2\delta - \delta^3)D\} = Q_1$$

$$-\Sigma\{(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)B - (3\alpha^2\beta - \beta^3)A\} + \Sigma\{(\gamma^3 - 3\gamma\delta^2)D - (3\gamma^2\delta - \delta^3)C\} = Q_2$$

此處に A, B, C, D に關する 8 つの聯立方程式が求められたが (α, β), 又は (γ, δ) は 4 組あるので、積分常数 A, B 又は C, D は合計 4 組、即ち 8 つある。依つて全部の未知数を求めることが出来るわけである。

9. 實驗に對する變動荷重に依る計算

$$E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = 952 \text{ cm}^4$$

$$k = 88 \text{ kg/cm}^2$$

$$c = 2.3 \text{ kg sec/cm}^4$$

$$v = 1\,580 \text{ cm/sec} = 57 \text{ km/h}$$

$$m = 0$$

$$Q_1 = 1\,000 \text{ kg}$$

$$Q_2 = 0$$

$$\epsilon = 139.8 \text{ }^1/\text{sec}$$

とする。ε は此の列車速度で車輪が 71 cm の標準枕木間隔を通過するに要する時間 0.044 9 sec で 2π を割つたものである。之れから計算すると $\gamma_1 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}$ が求まる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & e^{0.008\,27x - 13.06t} \{-0.015\,73 \cos(0.017\,21x + 112.6t) - 0.002\,89 \sin(0.01721x + 112.6t)\} \\ & + e^{0.018\,49x - 29.21t} \{0.002\,39 \cos(-0.009\,98x + 155.6t) - 0.013\,97 \sin(-0.009\,98x + 155.6t)\} \end{aligned}$$

$x - 1580t \leq 0$ の場合

$$\begin{aligned} \gamma_2 = & e^{-0.017\,46x + 27.6t} \{0.000\,57 \cos(0.009\,86x + 124.2t) - 0.015\,28 \sin(0.009\,86x + 124.2t)\} \\ & + e^{-0.009\,61x + 15.19t} \{-0.013\,91 \cos(-0.018\,94x + 169.8t) - 0.001\,574 \sin(-0.018\,94x + 169.8t)\} \end{aligned}$$

$x - 1580t \geq 0$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} = & e^{0.008\,27x - 13.06t} \{205.5 \cos(0.017\,21x + 112.6t) - 10.14 \sin(0.017\,21x + 112.6t)\} \\ & + e^{0.018\,49x - 29.21t} \{71.2 \cos(-0.009\,98x + 155.6t) + 348.2 \sin(-0.009\,98x + 155.6t)\} \end{aligned}$$

$x - 1\,80t \leq 0$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2} = & e^{-0.017\,46x + 27.6t} \{-113.3 \cos(0.009\,86x + 124.2t) + 220.5 \sin(0.009\,86x + 124.2t)\} \\ & + e^{-0.009\,61x + 15.19t} \{389.9 \cos(-0.018\,94x + 169.8t) + 116.8 \sin(-0.018\,94x + 169.8t)\} \end{aligned}$$

$x - 1580t \geq 0$ の場合

之等の沈下並びに加速度を 245 cm の軸距を置いて加え合すと輪重 1000 kg のボギー臺車が通つた場合の沈下と加速度とが求められる。

之れに依つて求めた沈下は極めて小さいけれども、加速度は前の計算値よりも遙かに大きい。今前の計算値と今度の計算値とを加え合せて、其の最大上方加速度を實驗に於て求めた最大上方加速度 220 cm/sec^2 に等しくなる様 Q_1 を定めると

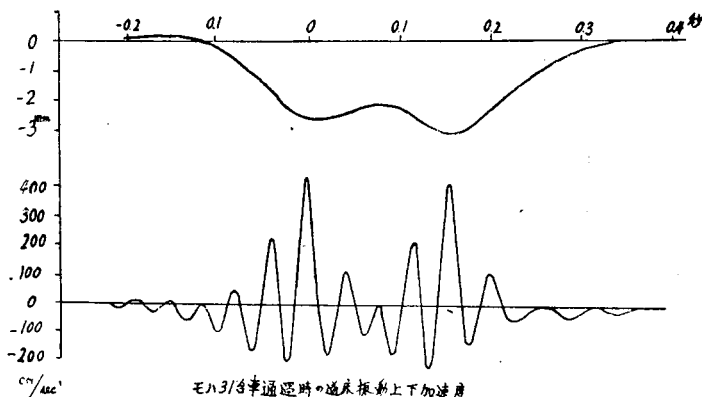
$$Q_1 = 612 \text{ kg とする。}$$

即ち最大上方加速度は第2車輪の前方24cmに於て生じてゐるので、最大加速度の内譯は次の様になる。

一定荷重に依る加速度	+62cm/sec ²
變動荷重に依る加速度	-282cm/sec ²
合計加速度	-220cm/sec ²

モハ3/台車通過時道床の沈下

圖-3



荷重の方はその平均が5400kgになつて居て夫れが、周期0,0449sec振幅612kgで振動してゐる。此の様な集中荷重が軸距245cm、速度57kg/hで走つてゐるわけである。

又此の最大上方加速度と餘り違はない、200cm/sec²の加速度が第1車輪の前方24cmに生じてゐる。

第1車輪と第2車輪との間に4つの小周期振動が出来てゐるのは第1車輪の小周期振動と第2車輪の小周期振動との合成振動に依つて生じたものである。

10. 高速列車に対する計算

$E=2\ 100\ 000\ \text{kg/cm}^2$	$I=952\ \text{cm}^4$
$Q=5\ 400\ \text{kg}$	$k=88\ \text{kg/cm}^2$
$e=2.3\ \text{kg sec/cm}^4$	$v=3\ 000\ \text{cm/sec}=108\ \text{km/h}$
$m=0$	$Q_1=1\ 000\ \text{kg}$
$Q_2=0$	$\varepsilon=265.5\ \text{1/sec}$

とする。εは2πを此の列車速度で車輪が71cmの標準間隔を通過するに要する時間0.02367秒で割つたものである。之れから一定荷重に対する計算をすると加速度を求めることが出来る。

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = e^{0.1061x - 31.8t} \{ 537 \cos(0.00558x - 16.75t) + 786 \sin(0.00558x - 16.75t) \}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = e^{-0.01061x + 31.8t} \{ 537 \cos(0.01392x - 41.8t) - 611 \sin(0.01392x - 41.8t) \}$$

次に變動荷重に対する加速度を計算すると次の如くなる。

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = e^{0.00873x - 26.19t} \{ 462 \cos(0.02023x + 204.7t) + 31.5 \sin(0.02023x + 204.7t) \}$$

$$+ 0.02248x - 67.5t \{ 36.3 \cos(-0.00867x + 291.5t) + 82.1 \sin(-0.00867x + 291.5t) \}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = e^{-0.02045x + 61.4t} \{ -357 \cos(0.01101x + 232.5t) + 447 \sin(0.01101x + 232.5t) \}$$

$$+ e^{-0.01077x + 32.30t} \{ 856 \cos(-0.02260x + 333.3t) + 406 \sin(-0.02260x + 333.3t) \}$$

之等の式から加速度を求めて、245cmの軸距を置いて加え合すと5400kgの一定荷重に依る加速度と1000kgの變動荷重に依る加速度とが求められる。

今荷重の時間に対する上下動が、荷重の移動速度に關係なく一定の正弦波形をしてゐるとすれば、荷重に働く上下加速度は列車速度の2乗に比例する。

此の考えに依つて57km/hの列車速度の場合求めた變動荷重に対する最大上方加速度-282cm/sec²から103km/hの列車速度の場合を算出すると、變動荷重に対する最大上方加速度は-1,016cm/sec²となる。此の加速度の發生する位置は第2車輪の前方21cmであつて、之れに一定荷重に依る加速度

$$219\ \text{cm/sec}^2$$

を加えると、合計加速度は

$$-797 \text{ cm/sec}^2$$

となる。

11. 計算に依つて求めた道床破壊速度

57 kg/h の列車速度に對する最大上方加速度 -220 cm/sec^2 及 108 kg/h の列車速度に對する最大上方加速度 -797 cm/sec^2 を圖に示すと圖—4 の如くなり、之れから最大上方加速度が重力の加速度 980 cm/sec^2 になる列車速度即ち破壊速度を 120 kg/h と求めることが出来る。

道床破壊速度と同じ様に此處で新たに、車輪に重力の加速度と同じ上方加速度が作用する列車速度を、車輪浮上り速度とすれば、車輪浮上り速度も本文の理論式から之れを推定することが出来る。

12. 加速度比から求めた道床破壊速度

前に示した加速度比測定装置に依つて求めた平均速度 $v=57 \text{ km/h}$ に對する。加速度比 $k=0.014$ に總武線下總中山驛附近で貨物列車に依つて求めた。

$$\tan \beta = 0.0006 \quad \tan \theta = 0.0324$$

を用いると道床破壊速度 V_∞ は次の式に依つて求められる。

$$V_\infty = \sqrt{1 + \frac{\tan \theta}{k - \tan \theta}}$$

即ち、 $V_\infty = 105 \text{ km/h}$ となる。

13. 荷重變化の周期の一定な場合

變動荷重の周期 ϵ が列車速度に對して逆比例する場合の計算を示したが、軌條が更に重いか、道床が堅いか、荷重が軽いとか、速度の低い場合には、枕木に依る振動周期より更に小さい周期の振動が主として車輪の自己振動に依つて發生する。特に一定種類の列車が一定の速度で走つて居る場合は之れが波狀磨耗を生ぜしめる原因をなすと考える。

此の振動は、列車速度に影響されない一定周期の振動となる。此の振動は本理論の ϵ を一定のものとして解くことが出来る。此の周期は $2\pi\sqrt{\frac{\eta}{g}}$ に依つて表わされる。此處に η は小周期振動を起させる荷重に依る道床の沈下である。

小周期振動の加速度は周期が小さくなる程大きくなつて来る。依つて大きい加速度を生ぜしめる場合は沈下の少い時で、沈下の少いのは重軌條の場合か、道床の堅い時か、荷重の軽い時等に起る。又列車速度が大きくなると自己振動周期よりも前に述べた、列車速度に逆比例する。小周期振動が主となつて来るので、車輪の自己振動周期が大きくなるのは列車速度の比較的低い所に表われることとなる。

14. 結 論

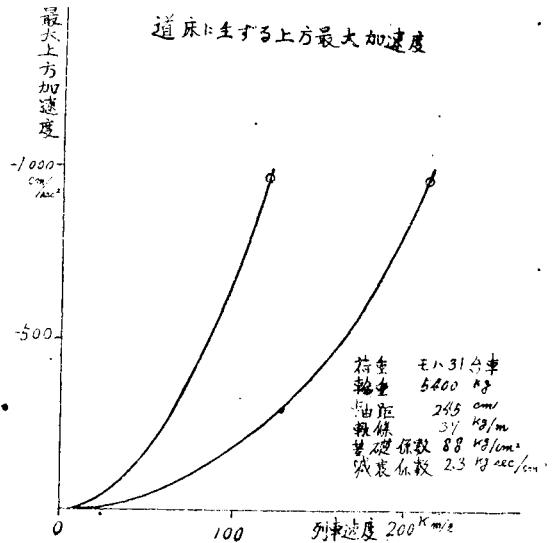
壓力と歪との間に比例關係の成立するのは道床に壓力が加わつて居る場合、車輪が軌條を押して居る場合に限られて居るので、道床間や車輪と軌條との間に張力を考えられない。

此の意味に於て、道床破壊速度又は車輪浮上り速度以上の場合には、此の理論をそのまま使うことは困難である。

同じ現象が車輪から相等離れた軌條の浮上りの際に生じるのであるが、之れはその量も少く車輪からも遠いので、車輪附近で考へて居る加速度の場合、その影響は餘り無いものとする。

加速度比から求めた道床破壊速度 105 km/h と計算から求めた道床破壊速度 120 km/h とは可成接近した値で

圖—4



あるが、之等の間の差には實驗の誤差が含まれてゐることは勿論であるが、更に次の様な原因があるものと考えられる。變動荷重の變動は正弦曲線であるとしたが、實際のものは歪められた波狀曲線である。道床の小周期振動の振幅は列車速度に對して變化しないとしたが、實際には車輪が波狀曲線上を走る場合、遠心力が上下に働くから道床は剛體ではないので、列車速度の増加と共に振幅も増して来る。

小周期振動はバネ下荷重の外に、バネの性質に應じてバネ上荷重も影響を持つて来る。

桁の質量を無視したけれども、實際には桁以外にも振動する物質があるので、之等の慣性力も道床の振幅に影響を興える。

減衰係数を流體摩擦が作用するとしたけれども、實際には固體摩擦が主となつて居る。

基礎係数は荷重に對して一定數としたが實際には多少變化する。車輛からは車體の動搖、原動機の振動、偏心荷重に依る振動、車輪の偏磨耗の影響等が来る。軌道としては、軌條の繼目、偏磨耗、波狀磨耗、高低、通り、水準、軌間の齧、浮き、支承體の一樣でないこと、地盤の不同等に依る影響が来る。

車輪と軌條と道床とは同じ様に振動して居ると考えて、理論を作り、實際には道床の振動を測つて道床に應用することを考えて居るのであるが、之等は全然同じ様に振動して居るのではないので、有効値を求めて居ることになるものと考える。

(昭. 23. 7. 26 受付)

編集後記

土木學會の苦しい臺所のやりくりや、用紙不足、印刷會社の選定に悩まされたことなどのため論文集の發行がおくれて會員の方々に御迷惑をかけ申譯ありませんでしたがようやく發行の運びとなりました、今までの論文集は土木學會誌の臨時増刊號として發行されておりましたが今度の論文集は土木學會論文集と銘打つて刊行され表紙の「土木學會論文集」なる題字は日本書道界の重鎮である書道藝術院總務、審査員「大澤雅彦」先生の御執筆になるものであります。尙英文要旨を挿入し表紙も色紙を使用したりして幾分なりともざんしん味を持たせた心算であります。よりよい論文集を生む爲に編集上の御意見、御希望をどしどしお寄せ下さい。最後に此の論文集4號の編集にあつた委員は次の通りであります。

委員長 星野 和

委員 國分 正胤, 左合 正雄, 最上 武雄, 佐藤 清一, 新妻 幸雄, 平井 敦, 米元 卓介,
市浦 繁, 山田 順治, 田中 行男, 丸安 隆和, 八十島義之助,

囑託 樋口 芳朗, 堀米 昇, 丸谷 晴司,

(編集部)

昭和 24 年 6 月 25 日 印 刷 昭和 24 年 6 月 30 日 發 行

編輯兼發行者 東京都千代田區大手町 1 / 4 中 川 一 美

印 刷 者 東京都新宿區下落合 2 / 655 西 尾 眞 八

印 刷 所 東京都新宿區下落合 2 / 655 昭和印刷株式會社

日本出版協會 會員番號 准 B 104038 番

東京都千代田區大手町 2 丁目 4 番地

發 行 所 社 團 土 木 學 會
 法 人

電話丸ノ内 (23) 3945 番 振替口座東京 16828

TREATISES COLLECTION OF THE CIVIL ENGINEERING SOCIETY NO. 4

CONTENTS

	Page
Solution of the Continuous Plate in One Direction by the Slope Deflection Method <i>By Masao Naruoka, C. E. Member</i>	1
General Solution of a 2-Dimensional Elastic Body which has an arbitrary boundary and its stress distribution as a boundary condition <i>By Minoru Okabayashi, C. E. Member</i>	19
Fatigue Strength and Life of Structure receiving the Repeated Stress <i>By Dr. Ichiro Konishi, C. E. Member</i>	32
Theoretical Solutions of Arch and Arch Gravity Dam (I) <i>By Yukio Mura, C.E. Member</i>	40
Turbulent Viscosity Coefficients of the Nonuniform Flow at River Mouth. <i>By Tokuichi Hamada, C. E. Member</i>	57
Influences of Applying Curve at the Corner of Rectangular Sand Basin <i>By Takeshi Gōda, C. E. Assoc. Member</i>	69
Computation of Buckling Stress of the Rec-tangular Plate with Horizontal Stiffeners <i>By Masao Naruoka, C. E. Member</i>	74
Studies on Nonsymmetries of Slade-Type Distribution and Several New Solution. <i>By Shigehisa Iwai, C, E. Member</i>	84
Theory on Breaking of a Reinforced Concrete Member by the Application of Plastic Theory. <i>By Junji Yamada, C. E. Member</i>	105
Strength Standard and Shearing Strength of Dam Concrete (I) <i>By Tadashi Hatano, C. E. Member</i>	117
The Vibration of the Railway Track Ballast <i>By Norio Takahashi, C. E. Member</i>	124

OFFICE

No. 4 2-CHŌME, ŌTEMACHI, CHIYODAKU, TOKYO, JAPAN.

昭和二十六年六月二十五日印刷