任意の境界を有する２次元彈性體が其の境界條件として境界上の應力分布が與へられる場合の一般解法に就て

正員　岡林　稔

General Solution of a 2-Dimensional Elastic Body which has an arbitrary boundary and its stress distribution as a boundary condition.

By Minoru Okabayashi, C. E, Member

要　旨

２次元彈性理論に於ける Airy の應力函數の一般形が任意の調和函數を用ひれば，極めて簡單な形に表はされる事を明かにし，之に依つて，與へられた境界條件を滿足する Airy の應力函數を求める事は Potential に關する Dirichlet の問題，或ひは Neumann の問題の簡單な應用例として解決出來る事を證明したものである。尙ほ，念の爲め，極めて簡單な若干の計算例を附け加へた。

Summary.

It is demonstrated here that the general form of theAiry Stress Function in 2-dim nsional elassic theory can be led to a simpler form by using an arbitrary, harmonic function. H nce, to look for the Airy function satisfying the given boundary conditions can be led to a simple application of Dirichlet's problem or Neumann's problem on potential. Several si ple calculation examples ar added here for reference.

目　次

1. 應力函數の一般形

物體力が存在しないか，又は有つても一定の場合には，２次元彈性體の應力解は與へられた境界條件を滿足する樣に次の微分方程式を解く事に歸着する。

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

Φ は所謂 *Airy* の應力函數である。而して，其の應力は次式にて與へられる。

i) 物體力の無い場合

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

ii) 物體力として重さだけが有る場合（重力の方向を y 軸の正の方向にとる）

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\rho g x$$

ρ：物體の比重　　g：重力の加速度

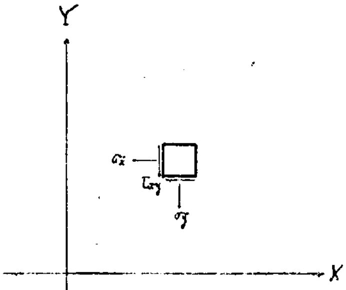


圖 1

（但し σ_x, σ_y 及 τ_{xy} は圖—1 の矢印の方向を正とする垂直應力及び切線應力を示す。）

尙ほ，以下の議論に於ては簡單の爲めに，物體力の無い場合を取扱ふ事とする。

（１） 式を滿足する應力函數 Φ は一般に次の形を有する。

$$\Phi=U+yV\cdots\cdots\cdots(2)$$

（但し U 及 V は夫々 Laplace の微分方程式を滿足する任意の調和函數であるとする。即ち

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}=0\Big)$$

次に(2)式を證明しよう。

(1)式は次式と同等である。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=2u \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

(但し u は任意の調和函數とする。從つて之に係數をつけるのは無意味であるが，──係數は u の中に含ませれば良い──說明の便宜の爲めに係數 2 を附しておく。)

さて

$$\frac{\partial V}{\partial y}=u$$

であつて，且つ V が調和函數である樣な函數 V は必ず存在するが，之を用ひて

$$\Phi=U+yV \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2')$$

と置く。此處に U は u にも V にも無關係な任意の調和函數とする。然るときは Φ は(3)式を滿足する。次に(2′)式と異る形の函數で，しかも(3)式を滿足する函數があるものと假定して，それを Φ_1 とする。即ち

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}=2u$$

である。しかるときは

$$\Phi_2=-\Phi\Phi_1$$

なる函數を考へれば

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}=2u-2u=0$$

となり，Φ_2 は又一ツの調和函數である。故に

$$\Phi_1=\Phi-\Phi_2=(U-\Phi_2)+yV$$

となり，右邊第1項の括弧内の函數はやはり調和函數であるから，結局 Φ_1 は(2′)式と同樣の形を有する函數である。以上に依つて，(1)式を滿足する函數の一般形は(2)式の形を有する事を知る。

尙ほ若干の蛇足を附け加へよう。

i) $\Phi=U+xV+yW$

上式は U, V 及 W を夫々任意の調和函數とすれば，(1) 式を滿足する事が容易に解る。しかし，之は次の樣にして(2)式の形に變換する事が出來る。

今 V に對する共軛調和函數を V とする。即ち V 及 $\overline{V}$ は

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \qquad \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}$$

なる Cauchy-Riemann の微分方程式を滿足する。しかるときは

$$U+xV+yW=U+(xV-y\overline{V})+y(\overline{V}+W)$$

と書く事が出來る。

しかるに，右邊第2項は又一ツの調和函數である事が證明される。即ち

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(xV-y\overline{V}\right)=2\frac{\partial V}{\partial x}-2\frac{\partial \overline{V}}{\partial y}=0$$

である。又第3項の括弧内の函數は勿論，調和函數である。

從つて

$$U+xV+yW=(\text{調和函數})+y\times(\text{調和函數})$$

の形をしてゐる。

ii) $\Phi=(x^2+y^2)U$

上式は U を任意の調和函數とすれば，(1)式を滿足する事が容易に解る。しかし，之は次の樣にして(i)の場合に歸着せしめる事が出來る。

今 U の共軛調和函數を $\bar{U}$ とすれば

$$(x^2+y^2)U=x(xU-y\bar{U})+y(x\bar{U}+yU)$$

と書く事が出來る。しかるに，右邊第 1 項及び第 2 項の括弧內の函數は何れも，前同様に調和函數である事が證明される。從つて

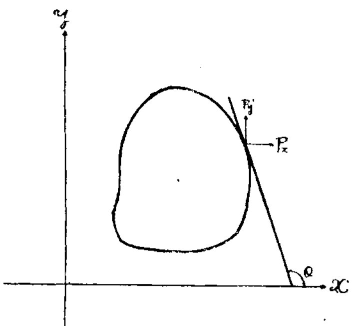
$$(x^2+y^2)U=x\times(\text{調和函數})+y\times(\text{調和函數})$$

の形をしてゐる。從つて，又之は(2)式の形と同様である事が解る。

2. 境界條件

（最上武雄博士著　2 次元彈性理論 85 頁～86 頁參照）

今境界條件として，境界上に於ける應力分布が與へられてゐるものとする。即ち圖—2 に於て，境界上の凡ての點の應力の x 方向の成分及び y 方向の成分（夫々 x 及 y の正の方向に向いてゐる場合を正と定める。）p_x 及 p_y が與へられてゐるものとする。しかるときは，應力函數を Φ とするとき，境界上に於ける



圖－2

$$\Phi \text{ 及 } \frac{\partial\Phi}{\partial n}$$

（但し n は境界に於ける內向き法線の方向を示す。）

の値を境界上の任意の一定點から正の方向（境界內部を左に見る方向）に測つた境界曲線の長さ s の函數として表はす事が出來る。即ち

$$p_x=\sigma_x\sin\theta-\tau_{xy}\cos\theta \qquad p_y=-\sigma_y\cos\theta+\tau_{xy}\sin\theta$$

（但し θ は切線の正の方向と x 軸の正の方向となす角）

にして且つ

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{dy}{ds}=\sin\theta \qquad \frac{dx}{ds}=\cos\theta$$

（之等の諸量の含む x 及 y の値は境界曲線上の値を代入すべきものである事は勿論である。）

故に

$$p_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$

$$p_y=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$$

故に

$$\int_0^s p_x ds=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]_0^s=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_s-\beta \qquad \beta=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0$$

$$\int_0^s p_y ds=-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_0^s=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_s+\alpha \qquad \alpha=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0$$

を得る。一方に於て

$$d\Phi=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{\partial s}\right)ds$$

であり，又內向き法線方向の方向微分が次式

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos\theta$$

で表はされる事から

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dx}{ds}$$

を得る。故に

$$\Phi_s=\int_0^s\left[-\frac{dx}{ds}\int_0^s p_y ds+\frac{dy}{ds}\int_0^s p_x ds\right]ds+\alpha x+\beta y+\gamma$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_s=\frac{dy}{ds}\int_0^s p_y ds+\frac{dx}{ds}\int_0^s p_x ds-\alpha\frac{dy}{ds}+\beta\frac{dx}{ds}$$

を得る。境界曲線の方程式 を $x=\phi(s)$ $y=\psi(s)$ と書き表はせば，上式の x,y $\frac{dx}{ds}$ 及 $\frac{dy}{ds}$ 等には此の曲線の方程式より得られる値（即ち s の函數の形）を代入すべき事，勿論である。上記2式に含まれる常數 $\alpha\beta$ 及 γ の内 α 及 β は夫々

$$\alpha=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 \qquad \beta=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0$$

に依つて定まる常數であるが，γ は任意の積分常數である。

以上に依つて，境界條件として境界上の應力分布の代りに，次のものを採用する事が出來る。即ち

「境界上に於ける Φ 及 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ の値が s の函數として與へられる。」

3. 與へられた條件を滿足する應力函數の一般解

以下に於ては，彈性體の領域が單連區域（即ち，彈性體の内部に孔の無い場合）を取扱ふ事とする。

今までの議論に依つて，問題は函數の形が

$$\Phi=U+yV$$

（U 及 V は任意の調和函數）

で境界條件は境界上に於て

$$\Phi_s=f(s) \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_s=g(s)$$

（$f(s)$ 及 $g(s)$ は旣知函數）

である場合の U 及 V を定める事に歸着する。

依つて，第一に V なる函數を境界内に於て Lnplace の微分方程式を滿足し，境界上に於ては

$$V_s=F(s)$$

（但し $F(s)$ は未知函數であるが，ただ

$$F(o)=F(l) \qquad l:\ \text{境界曲線の全長}$$

を滿足するものとする。）

である樣に定める。而して，之は F(s) を一應旣知函數である樣に取扱へば Potential に關する Dirichlet の問題に同じである。從つて，其の解は境界である閉曲線の方程式を

$$x=\phi(s) \qquad y=\psi(s)$$

で表はすとき

$$K(s,t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

（但し $x=\phi(s)$ $y=\psi(s)$ $\xi=\phi(t)$ $\eta=\psi(t)$ を代入する。）

と置けば

$$\mu(s)=\frac{F(s)}{\pi}-\int_0^l K(s,t)\mu(t)dt \qquad\cdots\cdots(4)$$

なる第2種 Fredholm 積分方程式の解 $\mu(t)$ を求め，之を次式に代入すれば得られる。

$$V(x,y)=\int_0^l\mu(t)\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\rho}dt \qquad\cdots\cdots(5)$$

（但し $\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$

であつて，$\frac{\partial}{\partial n}$ は閉曲線の内向き法線の方向の方向微分を示すが，此の場合 x 及 y は一定と考へ，ξ 及 η の

みを變數と考へて微分すべきである。)

依つて，(5)式を書き直せば次の如くなる。

$$V=\int_0^l \mu(t)\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}dt \cdots\cdots(6)$$

(但し　$\xi=\phi(t)$　$\eta=\psi(t)$　$\xi'=\frac{d}{dt}\phi(t)$　$\eta'=\frac{d}{dt}\psi(t)$　とす。)

又(4)式の解は $D(-1)$ を $\lambda=-1$ のときの核 $K(t,r)$〔之は $K(s,t)$ の文字を書換へただけである。〕に對する，Fredholm の行列式 $D(\lambda)$ であるとし，$D(t,r;-1)$ を同じく Fredholm の第１小行列式とすれば

$$\mu(t)=\frac{F(t)}{\pi}+\frac{1}{D(-1)}\int_0^l D(t,r;-1)\frac{F(r)}{\pi}dr \cdots\cdots(7)$$

である。依つて，之を(6)式に代入すれば V が得られる。次に U を境界内で *Laplace* の微分方程式を満足し境界上に於ては

$$U_s=f(s)-\psi(s)F(s)$$

を満足する様に定める。尚ほ $f(s)$ 及 $\psi(s)$ は共に

$$f(o)=f(l)\qquad \psi(o)=\psi(l)$$

を満足するから，又

$$f(o)-\psi(o)F(o)=f(l)-\psi(l)F(l)$$

である。又上の條件に依つて

$$\Phi_s=f(s)$$

なる第１の境界條件は満足する事となる。此の U の解も亦 V 同様にして

$$U(x,y)=\int_0^l \nu(t)\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}dt \cdots\cdots(8)$$

$$\nu(t)=\frac{f(t)-\psi(t)F(t)}{\pi}+\frac{1}{D(-1)}\int_0^l D(t,r;-1)\frac{f(r)-\psi(r)F(r)}{\pi}dr \cdots\cdots(9)$$

で與へられる。而して，(6)式及び(8)式で與へられる U 及 V は境界内部に於てのみ成立するのであつて，考へてゐる點が境界内部から限りなく境界に接近する極限に於て，其の値が夫々

$$f(s)-\psi(s)F(s)\qquad 及\qquad F(s)$$

に一致するのである。依つて，以後に於ては，境界上に於てと言ふ事は境界内部から限りなく境界に接近した極限に於てと言ふ意味である事とする。さて問題は(6)式及び(8)式を用ひて境界上に於ける

$$\frac{\partial}{\partial n}(U+yV)$$

の値が $g(s)$ に一致する様に $F(s)$ を定める事に歸着する。今之を式に書けば次の如くなる。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg[\int_0^l\left\{\frac{f(t)+\psi(t)F(t)}{\pi}+\frac{1}{D(-1)}\int_0^l D(t,r;-1)\frac{f(r)-\psi(r)F(r)}{\pi}dr\right\}P(s,t)dt$$
$$+\int_0^l\left\{\frac{F(t)}{\pi}+\frac{1}{D(-1)}\int_0^l D(t,r;-1)\frac{F(r)}{\pi}dr\right\}Q(s,t)dt\Bigg]=g(s) \cdots\cdots(10)$$

(但し

$$P(s,t)=\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right\}=-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right\}\psi'(s)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right\}\phi'(s)$$
$$=\frac{-\psi'(s)\{(x-\xi)^2\eta'-2(x-\xi)(y-\eta)\xi'-(y-\eta)^2\eta'\}+\phi'(s)\{(x-\xi)^2\xi'+2(x-\xi)(y-\eta)\eta'-(y-\eta)^2\xi'\}}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^2}$$

$$Q(s,t)=\frac{\partial}{\partial n}\left\{y\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right\}=-\frac{\partial}{\partial x}\left\{y\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right\}\psi'(s)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{y\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right\}\phi'(s)$$

$$=\frac{-\psi'(s)\{(x-\xi)^2\eta'-2(x-\xi)(y-\eta)\xi'-(y-\eta)^2\eta'\}+\phi'(s)\{(x-\xi)^2\xi'+2(x-\xi)(y-\eta)\eta'-(y-\eta)^2\xi'\}}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^2}y$$

$$+\varphi'(s)\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

にして，且つ

$$x=\phi(s)-\varepsilon\psi'(s)\qquad y=\psi(s)+\varepsilon\phi'(s)\qquad \xi=\phi(t)\qquad \eta=\psi(t)$$

を代入したものである。)

次に(10)式左邊第1項に於て

$$\int_0^l\left\{\frac{1}{\pi D(-1)}\int_0^l D(t,r;-1)\psi(r)F(r)\right\}P(s,t)dt$$

なる項を考へるに，變數 t 及 r の文字を交換し，積分順序を變更すれば

$$=\int_0^l\left\{\int_0^l\frac{D(r,t;-1)}{\pi D(-1)}P(s,r)dr\right\}\psi(t)F(t)dt$$

となる。而して，此の式の内で F(t) を除く凡ての函數は既知函數である。同様の事を (10) 式左邊の第2項の F(r) を含む項に就ても行へば，(10)式は次の如き形になる。

$$H(s)=\int_0^l R(s,t)F(t)dt\quad\cdots\cdots(11)$$

（但し $H(s)$ 及 $R(st)$ は既知函數）

從つて，(11)式は未知函數 F(t) を定める爲めの第 1 種 Fredholm 積分方程式である。之を解く爲めに，核 R (s,t) を對稱形になる樣に變換する。即ち

$$\Psi(s)=\int_0^l R(t,s)H(t)dt$$

と置けば，上式右邊に未知函數は無いから $\Psi(s)$ 既知函數である。此の式に(11)式から得られる $H(t)$ を代入すれば，次の如くなる。

$$\Psi(s)=\int_0^l\int_0^l R(t,s)R(t,r)F(r)drdt$$

上式に於て，變數 t 及 r の文字を交換し，積分順序を變更すれば，次の如くなる。

$$=\int_0^l\int_0^l R(r,s)R(r,t)F(t)dtd=\int_0^l\left\{\int_0^l R(r,s)R(r,t)dr\right\}F_1(t)dt$$

故に，今

$$W(s,t)=\int_0^l R(r,s)R(r,t)dr$$

と置けば

$$W(s,t)=W(t,s)$$

となり，且つ $W(s,t)$ は既知函數である。即ち，上式は

$$\Psi(s)=\int_0^l W(s,t)F(t)dt\quad\cdots\cdots(12)$$

なる對稱核 $W(s,t)$ を有する Fredholm の第1種積分方程式となる。從つて W(s,t) の完全法化直交固有函數系を $u_n(s)$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ とし，之に屬する固有値を λ_n $(n1,2,3,\cdots\cdots)$とするとき

$$\Psi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n(s) \qquad (c_n \text{ は常數})$$

なる展開を行へば，$F(s)$ は

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\lambda_n u_n(s) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

で與へられる。尚は　$g(o)=g(l)$　$P(o,t)=P(l,t)$　$Q(o,t)=Q(l,t)$　等が成立するから　$\Psi(o)=\Psi(l)$　であり，從つて，　$u_n(o)=u_n(l)$　$(n=1,2,3\cdots\cdots)$　が成立する。

依つて，　$F(o)=F(l)$

が滿足される。以上に依つて，$F(s)$ が定まれば從つて　U 及 V が定まる。依つて，其の u 及 V を用ひて

$$\Phi=U+yV$$

と置けば Φ は求むる應力函數である。尚ほ，(13)式の無限級數は變域內 ($0\leqq s\leqq$) に於て，一様收斂でなければならない。しかしながら，境界に與へられる應力分布が靜止の平衡條件を滿足する限り，唯一ツの解が存在する筈である。そして，それは必ず本解法によつて求める事が出來る筈である。故に，境界に於ける應力分布が靜止の平衡條件を滿足する限り，(13)式は變域內で一様收斂であると考へられる。

又 Φ の中には未定常數 α 及 β の2個を含むが，Φ の形が求まれば，α 及 β を決定するのは極めて容易である。即ち，求められた Φ を x 及 y で夫々偏微分し，之に

$$s=o$$

に於ける x 及 y の値を代入したものは夫々 α 及 β に等しいのであるから，此處に α 及 β に關する連立2元方程式が得られる事になる。依つて，それを解けば，α 及 β が簡單に求められる。

尚ほ此の解は最初 Dirichlet の問題の解から始める代りに，Neumann の問題の解から始める事も可能である。即ち，

$$\Phi=U+yV$$

と置き，V を境界內で Laplace の微分方程式を滿足し，境界上で

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]_s=G(s)$$

(但し $G(s)$ は未知函數であるが

$$G(o)=G(l)$$

を滿足するものとする。)

である樣に V を定める。而して，$G(s)$ を一應旣知函數である樣に取扱へば，$V(x,y)$ は Potential に關する Neumann の問題の解であつて

$$V(x,y)=-\frac{1}{2}\int_o^l\mu(t)\log\{(x-\phi(t))^2\log\{(x-\phi(t))+(y-\psi(t))^2\}dt$$

(但し　$$\mu(s)=\frac{G(s)}{\pi}+\int_o^l K(s,t)\mu(t)dt$$

にして　$$K(s,t)=\frac{1}{\pi}\,\frac{(\eta-y)\xi'-(\xi-x)\eta'}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$$

である。)

となる。次に，U は境界內で Laplace の微分方程式を滿足し，境界上で

$$\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right]_s=g(s)-\left[\frac{\partial y}{\partial n}V\right]_s+\psi(s)G(s)$$

從つて，　$$\left[\frac{\partial}{\partial n}(U+yV)\right]_s=g(s)$$

である様に定める。而して，之も Neumann の問題であるから解が得られる。斯くして，得られた U 及 V と他の境界條件

$$[U+yV]_s=f(s)$$

とを組合はせれば，$G(s)$ を決定する爲めの關係式が得られる。

從つて，G(s) が決り，U 及 V が決り，求むる解が得られる。其の解は解の唯一性に依つて，前法に依つて得られた解と一致する筈である。

4. 變數の變換

以上に依つて，任意の境界を有する２次元彈性體が境界條件として境界上の應力分布を與へられるときの一般解を理論的には求め得る事を知つた。しかしながら，境界の形狀が特殊なものでない限り，一般には此の解法をそのまま適用したのでは計算が極めて繁雜で到底解を求めるに至らない。ただ境界が一ツの無限直線（例へば xy 平面に於て x 軸を境界とする）であつて，其の上方の半平面を彈性體の領域とする樣な場合（此の場合は境界が閉曲線でないが，數球面の觀念を借りれば，この直線は數球面の一ツの大圓に對應するものであつて，矢張り一ツの閉曲線であると考へる事が出來る。）にあつては，實際の計算が比較的簡單に行はれる。境界が圓の場合でも，結局 Poisson の積分の應用に歸着するので，任意の應力分布に對して實際の計算を遂行するのはなかなか困難である。依つて，一般的な境界を有する問題は先づ適當な寫像函數を用ひて，境界を無限直線に寫像する事が必要である。今應力函數 Φ を

$$\Phi(x,y)=U(x,y)+yV(x,y)\cdots\cdots(14)$$

と置く。而して，適當な寫像函數

$$x=F(X,Y) \qquad y=G(X,Y)\cdots\cdots(15)$$

を用ひれば與へられた境界を無限直線に寫像する事は可能である。而して，寫像函數であるから

$$\frac{\partial x}{\partial X}=\frac{\partial y}{\partial Y} \qquad \frac{\partial x}{\partial Y}=-\frac{\partial y}{\partial X}\cdots\cdots(16)$$

なる關係がある。從つて，(14)式を(15)式に依つて變數の變換を行つた場合

$$\Phi_1(X,Y)=U_1(X,Y)+G(X,Y)V_1(X,Y)\cdots\cdots(17)$$

なる形になつたとすると，$\Phi_1 U_1$ 及 V_1 なる函數は夫々 Φ, U 及 V なる函數と同じものではあるが，形は異つてゐる。而して，變數 X 及 Y に關しては Φ_1 は一般に次の微分方程式を滿足しない。

$$\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial X^4}+2\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial X^2\partial Y^2}+\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial Y^4}=0$$

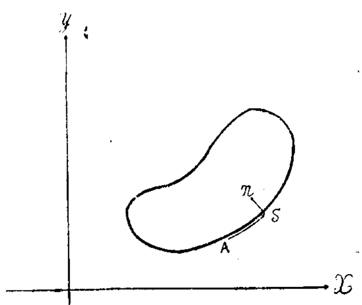


圖-3

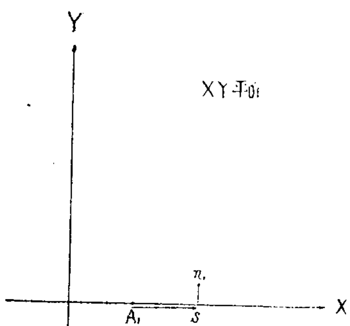


圖-4

しかしながら，U_1 及 V_1 は變數 X 及 Y に關しても依然として調和函數である事が(16)式の關係を使へば簡單に解る。又 xy 平面（圖—3 參照）上に於ける曲線の長さ s の或る函數 $f(s)$ は XY 平面（圖—4 參照）上の曲線

の長さ s_1（xy 平面上の A 點は XY 平面上の A_1 點に對應するものとすれば，s_1 は A_1 點から正の方向に測る。）と s との函數關係を求め得る筈であるから，又 s_1 の或る函數として表はす事が出來る。それを $f_1(s_1)$ とする。次に，xy 平面上の内向き法線の方向 n は寫象の等角性により，XY 平面上の對應する曲線の内向き法線の方向 n_1 に對應する。而して，xy 平面の閉曲線上の一點とそれから法線方向に距離 ε だけ内側に入つた點を考へ，それ等の XY 平面上に於ける對應點間の距離を ε_1 とすれば，

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 0}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$$

の値も亦 s_1 の函數として求め得る筈である。それを

$$j(s_1)$$

とする。從つて，

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_s=\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}\right]_{s1} j(s_1)$$

となり，

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_s=g(s)$$

であつて，之は s_1 の函數に直せるのであるから，結局 $\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}\right]_{s1}$ を s_1 の函數として表はす事が出來る。それを

$$g_1(s_1)$$

とする。從つて，問題は(17)式なる函數を境界上に於て，

$$\left[\Phi_1\right]_{s1}=f_1(s_1)\qquad\qquad \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}\right]_{s1}=g_1(s_1)$$

なる境界條件を滿足する樣に調和函數 U_1 及 V_1 を定める事に歸着する。此の解法は前節の解法と全く同樣の手法に依つて解決する事が出來る。ただ異るのは XY 平面上の境界曲線の方程式を

$$X=\phi_1(s_1)\qquad\qquad Y=\psi_1(s_1)$$

とするとき，U_1 を定めるべき境界條件が

$$[U_1]_{s1}=f_1(s_1)-G\{\phi_1(s_1,\psi(s_1)\}F_1(s_1)$$

である事と，前節に於ける $Q(s,t)$ に對應する函數の形が少し變るだけである。以上によつて，(17)式の解が求まれば，(15)式の關係を用ひて再び變數を元の x 及 y に戻せば所要の解を求める事が出來る。

5. 計 算 例

i） 境界が一ツの無限直線である場合

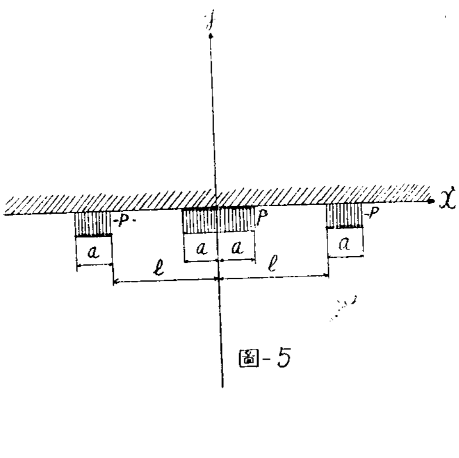


圖-5

境界を 圖—5 に示す樣に x 軸にとり，之より上部（$y>0$の範圍）の半平面を領域とする彈性體に圖の樣な外力が加はつた場合を考へる。（外力は靜止の平衡條件を滿足せねばならない。）而して，境界曲線（今の場合は x 軸）の長さを測る起點を原點にとれば境界條件は次の如くなる。

$$\Phi_s=\alpha s-pal+\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots s\leqq-(a+l)$$

$$=\frac{p}{2}s_2+p(a+l)s+\alpha s+\frac{p}{2}(a^2+l^2)+\gamma$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots-(l+a)\leqq s\leqq -l$$

$$=pas+\alpha s+\frac{p}{2}a^2+\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots -l\leqq s\leqq -a$$

$$=-\frac{p}{2}s^2+\alpha s+\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots -a\leqq s\leqq a$$

$$=-pas+\alpha s+\frac{p}{2}a^2+\gamma \cdots\cdots l\geqq s\geqq a$$

$$=\frac{p}{2}s^2-p(a+l)s+\alpha s+\frac{p}{2}(a^2+l^2)+\gamma \cdots\cdots (a+l)\geqq s\geqq l$$

$$=\alpha s-pal+\gamma \cdots\cdots s\geqq a+l$$

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_s=\beta$$

但し　$\alpha=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}$　$\beta=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}$　γ は積分常數

而して，問題が y 軸に關して對稱であるから

$$\alpha=0$$

を得る。(之が正しい事は後に別に證明する事も出來る。)

次に　$\Phi=U+yV$

に於て，境界上に於ては

$$y=0$$

であるから

$$\Phi_s=U_s$$

となる。從つて，U は上記の境界條件を滿足する樣な調和函數として定めれば良い。(一般の境界の場合に比べて遙かに簡單に U が決る。)從つて，先づ

$$\mu(s)=\frac{\Phi_s}{\pi}-\int_{-\infty}^{\infty}K(s,t)\mu(t)dt$$

に依つて，$\mu(s)$ を定める式を作れば

$$K(s,t)=\frac{1}{\pi}\frac{(y-\eta)\xi'-(x-\xi)\eta'}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

にして　$x=s$　$\xi=t$　$y=\eta=0$　$\xi'=1$　$\eta'=0$

故に，　$K(s,t)=0$

となり　$\mu(s)=\frac{\Phi_s}{\pi}$

となる。之を

$$U=\int_{-\infty}^{\infty}\mu(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$$

に代入すれば U が得られる。其の結果は次の如くである。

$$\pi U=\int_{-\infty}^{-(a+l)}(-pal+\gamma)\frac{y}{(n-t)^2+y^2}dt+\int_{-(a+l)}^{-l}\left\{\frac{p}{2}t^2+p(a+l)t\right.$$
$$\left.+\frac{p}{2}(a^2+l^2)+\gamma\right\}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$$
$$+\int_{-l}^{-a}(pat+a^2+\gamma)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt+\int_{-a}^{a}\left(-\frac{p}{2}t^2+\gamma\right)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$$
$$+\int_{a}^{l}\left(-pat+\frac{p}{2}a^2+\gamma\right)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$$
$$+\int_{l}^{l+a}\left\{\frac{p}{2}t^2-p(a+l)t+\frac{p}{2}(a^2+l^2)+\gamma\right\}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$$
$$+\int_{l+a}^{\infty}(-pal+\gamma)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$$

故に

$$U=-pal+\gamma+\frac{p}{2\pi}\Big[y(x+l)\log\{(x+l)^2+y^2\}-\{(x+l)^2-y^2\}\tan^{-1}\frac{x+l}{y}$$

$$-y(y+a+l)\log\{(x+a+l)^2+y^2\}+\{(x+a+l)^2-y^2\}\tan^{-1}\frac{x+a+l}{y}$$

$$+y(x+a)\log\{(x+a)^2+y^2\}-\{(x+a)^2-y^2\}\tan^{-1}\frac{x+a}{y}-y(x-a)\log\{(x-a)^2+y^2\}$$

$$+\{(x-a)^2-y^2\}\tan^{-1}\frac{x-a}{y}+y)x-a-l)\log\{(x-a-l)^2+y^2\}+\{(x-a-l)^2-y^2\}\tan^{-1}\frac{x-a-l}{y}$$

$$-y(x-l)\log\{(x-l)^2+y^2\}+\{(x-l)^2-y^2\}\tan^{-1}\frac{x-l}{y}\Big]$$

次に
$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_s=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]_{y=0}=\left[\frac{\partial U}{\partial y}+V+y\frac{\partial V}{\partial y}\right]_{y=0}$$

故に
$$V_s=[V]_{y=0}=\beta-\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y=0}$$

即ち，V は境界上に於て上記の條件を滿す調和函數として定めれば良い。而して

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y=0}=\frac{p}{2\pi}\Big[(s+l)\log(s+l)^2-(s+a+l)\log(s+a+l)^2+(s+a)\log(s+a)^2-(s-a)\log(s-a)^2$$

$$+(s-a-l)\log(s-a-l)^2-(s-l)\log(s-l)^2\Big]$$

故に
$$V_s=\beta-\frac{p}{2\pi}\{(s+l)\log(s+l)^2-(s+a+l)\log(s+a+l)^2+(s+a)\log(s+a)^2-(s-a)\log(s-a)^2$$

$$+(s-a-l)\log(s-a-l)^2-(s-l)\log(s-l)^2)\}$$

依つて，V を計算すれば次の結果を得る。

$$V=\beta+\frac{p}{2\pi}\Big[-(x+l)\log\{(x+l)^2+y^2\}-2y\tan^{-1}\frac{x+l}{y}+(x+a+l)\log\{(x+a+l)^2+y^2\}$$

$$+2y\tan^{-1}\frac{x+a+l}{y}-(x+a)\log\{(x+a)^2+y^2\}-2y\tan^{-1}\frac{x+a}{y}$$

$$+(x-a)\log\{(x-a)^2+y^2\}+2y\tan^{-1}\frac{x-a}{y}-(x-a-l)\log(x-a-l)^2+y^2\}$$

$$-2y\tan^{-1}\frac{x-a-l}{y}+(x-l)\log\{(x-l)^2+y^2\}+2y\tan^{-1}\frac{x-l}{y}\Big]$$

從つて，求むる解は

$$\Phi=\frac{p}{2\pi}\Big[-\{(x+l)^2+y^2\}\tan^{-1}\frac{x+l}{y}+\{(x+a+l)^2+y\}\tan^{-1}\frac{x+a+l}{y}$$

$$-\{(x+a)^2+y^2\}\tan^{-1}\frac{x+a}{y}+\{(x-a)^2+y^2\}\tan^{-1}\frac{x-a}{y}$$

$$-\{(x-a-l)^2+y^2\}\tan^{-1}\frac{x-a-l}{y}+\{(x-l)^2+y^2\}\tan^{-1}\frac{x-l}{y}\Big]+\beta y-pal+\gamma$$

尙ほ，最後の項（$\beta y-pal+\gamma$）は彈性體內部の應力狀態を知らうと言ふ我々の要求に對しては省略して差支へない。又

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

を計算すれば零となり，先に $\alpha=0$ と置いた事の正しい事が再確認される。更に，上記の解に於て，l を非常に大きくとれば

$$\Phi=\frac{pa}{2}(a+2l)+\frac{p}{2\pi}\Big[\{(x-a)^2+y^2\}\tan^{-1}\frac{x-a}{y}-\{(x+a)^2+y^2\}\tan^{-1}\frac{x+a}{y}\Big]$$

を得るが，此の式の右邊第1項は省略しても差支へないから，

$$\Phi=\frac{p}{2\pi}\left[\{(x-a)^2+y^2\}\tan^{-1}\frac{x-a}{y}-\{(x+a)^2+y^2\}\tan^{-1}\frac{x+a}{y}\right]$$

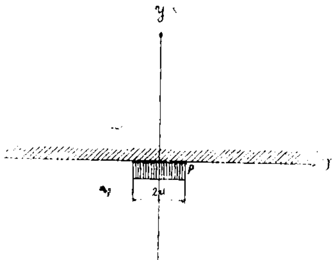


圖-6

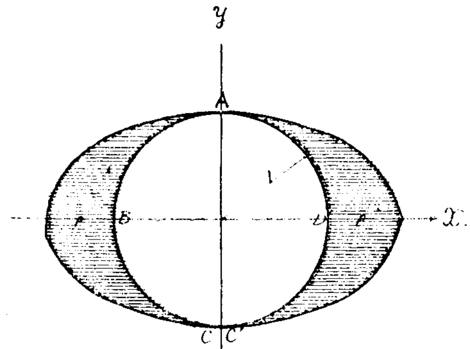


圖-7

となる。依つて，之は圖—6 の如き外力が直線境界の半平面に加へられるときの應力函數を與へる。而して，此の結果は，從來 J. H.Michell に依つて求められてゐるものと結果に於て一致する。

ii）境界が單位圓である場合

境界は圖—7 に示す如き，半徑1なる圓だとする。又境界に於ける應力分布は，曲線の長さを測る起點に A 點を選べば，

$$p_x=-p\sin s\qquad p_y=0\ (\text{但し } p \text{ は常數})$$

だとする。從つて，境界條件は次の如くなる。

$$\Phi_s=p\left(\frac{1}{2}\cos^2 s-\cos s\right)-\alpha\sin s+\beta\cos s+\frac{p}{2}+\gamma$$

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_s=-p\cos s(\cos s-1)+\alpha\sin s-\beta\cos s$$

しかるに．x 軸及 y 軸に關する對稱の故に

$\alpha=0\qquad\beta=p$　　なる事が解る。(之は後に別に證明する事も出來る。)

又 $\left(\frac{p}{2}+\gamma\right)$ を改めて γ と書けば上の條件は次の如くなる。

$$\Phi_s=\frac{p}{2}\cos^2 s+\gamma\qquad\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_s=-p\cos^2 s$$

今

$$x=\frac{-2X}{X^2+(Y+1)^2}\qquad y=\frac{2(Y+1)}{X^2+(Y+1)^2}-1$$

なる寫像函數に依つて，變數の變換を行へば，

$$\Phi=U+yV$$

は

$$\Phi_1=U_1+\left\{\frac{2(Y+1)}{X^2+(Y+1)^2}-1\right\}V_1$$

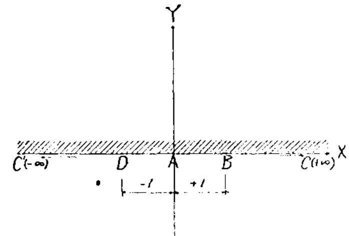


圖 8

となり，xy 平面上の單位圓は XY 平面上（圖—8 參照）の X 軸に寫像され，單位圓の內部は X 軸より上部の半平面に對應する。又單位圓上の ABCC' 及 D 點は夫々 X 軸上の ABCC' 及 D 點に對應する。而して，軸 X 上の A 點を起點として測つた境界直線の長さを s_1 で表はせば

$$\sin s=\frac{2s_1}{1+s_1^2}\qquad\cos s=\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2}$$

なる關係がある。又 xy 平面上の單位圓上の點と，之より半徑方向に距離 ϵ だけ內側に入つた點との XY 平面上

に於ける對應點の距離を ε_1 とすれば

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}=\frac{1}{1+\cos s}=\frac{1+s_1^2}{2}$$

となる。故に，Φ_1 の境界條件は次の如くなる。

$$\left[\Phi_1\right]_{s_1}=\frac{p}{2}\frac{(1-s_1^2)^2}{(1+s_1^2)^2}+\gamma \qquad \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}\right]_{s_1}=-2p\frac{(1-s_1^2)^2}{(1+s_1^2)^3}$$

依つて，前題の如く之を解けば

$$K(s_1,t_1)=0$$

故に $$\frac{D(t_1,r_1;-1)}{D(-1)}=0$$

であり，又第3節に於ける $P(s,t)$ 及 $Q(s,t)$ に對應するものを作れば次の如くなる。

$$P(s_1,t_1)=\frac{(s_1-t_1)^2-\varepsilon_1^2}{\{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2\}^2}$$

$$Q(s_1,t_1)=\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2}P(s_1,t_1)-\frac{2(1-s_1^2)}{(1+s_1^2)}\frac{\varepsilon_1}{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2}$$

而して，上記2式に於て，直ちに

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\frac{(s_1-t_1)^2-\varepsilon_1^2}{\{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2\}^2}=\frac{1}{(s_1-t_1)^2} \qquad \lim_{\varepsilon_1\to+0}\frac{\varepsilon_1}{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2}=0$$

と置いてしまうのは危險である。何となれば，t_1 が s_1 の極めて近傍の値をとるときには，之等は何れも

$\frac{0}{0}$ の形を有するからである。尚ほ $Q(s_1,t_1)$ の式の内

$$\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2} \quad 及 \quad \frac{2(1-s_1^2)}{(1+s^2)^2}$$

なる係數は元來 ε_1 を含んでゐるのであるが，之等に於ては直ちに $\lim_{\varepsilon_1\to+0}$ としても何等の不都合を生じないので，始めから $\varepsilon_1\to+0$ の極限に於ける値を用ひてある。依つて，

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}P(s_1,t^1)dt_1 \quad 及 \quad \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}Q(s_1,t_1)dt$$

を計算すれば

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int^{\infty}P(s_1,t_1)dt_1=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(s_1-t_1)^2-\varepsilon_1^2}{\{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2\}^2}dt_1=0$$

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}Q(s_1\ t_1)dt_1=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2}\frac{(s_1-t_1)^2-\varepsilon_1^2}{\{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2\}}\right.$$
$$\left.-\frac{2(1-s_1^2)}{(1+s_1^2)^2}\frac{\varepsilon_1}{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2}\right]dt_1=-\frac{2\pi(1-s_1^2)}{(1+s_1^2)^3}$$

となる。依つて，第3節(10)式に對應する式を作れば次の如くなる。

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{p}{2}\frac{(1-t_1^2)^2}{(1+t_1^2)^2}+\gamma-\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}F(t_1)\right\}P(s_1,t_1)dt_1\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t_1)Q(s_1,t_1)\,dt_1\right]=-2p\frac{(1-s_1^2)^2}{(1+s_1^2)^3}$$

（但し $F(t_1)$ は V_1 に對する境界條件である。）

依つて，上記の第1種 Fredholm 積分方程式を解けば $F(t_1)$ が得られる。其の解は

$$F(t_1)=\frac{p}{2}\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}$$

である。之は

$$F(-\infty)=F(\infty)$$

を滿足してゐる。驗算の爲めに之を上式に代入すれば

左邊第1項$=0$

$$\text{左邊第2項}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\frac{p}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}Q(s_1,t_1)dt_1=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\frac{p}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-1+\frac{2}{1+t_1^2}\right)Q(s_1,t_1)dt_1$$

$$=p\frac{1-s_1^2}{(1+s_1^2)^2}+\lim_{\varepsilon_1\to+0}\frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t_1^2}Q(s_1\ t_1)dt_1$$

となるが

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t_1^2}\frac{(s_1-t_1)^2-\varepsilon_1^2}{\{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2\}^2}dt_1=\pi\frac{s_1^2-1}{(1+s_1^2)^2}$$

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t_1^2}\frac{\varepsilon_1}{(s_1-t_1)^2+\varepsilon_1^2}dt_1=\frac{\pi}{1+s_1^2}$$

であるから

$$\text{左邊}=p\frac{1-s}{(1+s_1^2)^2}-p\frac{(1-s_1^2)^2}{(1+s_1^2)_3}-2p\frac{1-s_1^2}{(1+s_1^2)^3}=-2p\frac{(1-s_1^2)^2}{(1+s_1^2)^3}=\text{右邊}$$

となる。即ち，正しい事が驗算された。尙ほ，γ は任意の常數であるから，

$\gamma=0$

とすれば，U_1 及 V_1 の境界條件は

$$\Big[U_1\Big]_{s_1}=0 \qquad \Big[V_1\Big]_{s_1}=\frac{p}{2}\frac{1-s_1^2}{1+s_1^2}$$

である。故に，其の解は

$$U_1=0 \qquad V_1=\frac{p}{2}\left\{\frac{2(Y+1)}{X^2+(Y+1)^2}-1\right\}$$

である。之を元の變數に戻せば，Φ の所要の解として

$$\Phi=\frac{p}{2}y^2$$

を得る。尙ほ，α 及 β の値を計算すれば

$\alpha=0$　　$\beta=p$　　なる事が再確認される。(昭 23. 4. 13. 受付)

繰返應力による構造物の疲勞强度とその壽命について

正員，工博　小西一郎*

Fatigue Strength and Life of Structure receiving the Repeated Stress.

By Dr. Ichiro Konishi, C. E. Member

要旨。 本文は極限狀態の1場合として，金屬材料を用いた構造物が繰返變動應力を受けた場合の疲勞强度並にその壽命に就き實驗並に基礎的考察を行つたものである。

Summary.

This article explains the experiments and fundamental studies made on the fatigue strength and the life of a metal structure r ceiving repeated stress.

* 京都大學教授 工學部土木工學教室勤務