樹枝狀構造の研究

正員　岡　本　但　夫*

Study of Arborescent Construction

By Tadao Okamoto, C. E., Member

梗概　一般に或區域内に廣く散在する要素を或一つの中心に連絡する時，又は逆に中心から各部分に到る場合に廣く見受ける形に樹枝狀組織がある．即ち幹より枝，枝より小枝へ，かくては末は毛細組織に到る一群の組織がある．右は樹木・人の血管及神經系・河川系・其他諸般の行政及經濟機構・更に交通線網（鐵道・道路）に於ても亦之に類似した形が現はれて居る．一般に要素が各部分より中心に到るのに抵抗を最も少くする場合に起る形と考へられる．

今例として或面積内に降つた雨を海へ出す場合を考へやう．降つた雨は次第に集つて小流となり，更に小流同志集つて遂に大幹線となつて入海する．たとへ距離的には最短であつても決して雨水が分散した儘海に入る事は無い．之は雨水が動く場合に水が集中する程單位面積當の抵抗が少くなるから距離的に遠くなつても先ず集中してから流れやうとするものと考へられる．一般に此現象は自然界，人文界に多く見られるが其實相は千差萬別，可成複雑難解なものの如くである．之に一歩を踏出す爲本論に於ては之を出來るだけ簡單化し模型化して取扱ふ事にした．かくする事により實相よりの偏倚が多くなるかも知れぬ事も考へられるが研究の順序として一應之から出發する．

目　次

I. 模形其一

(1) 表面一樣な矩形面積内に一樣に存在する湧點より湧出する要素が逐次幹線に集められて矩形の外へ出る狀態を研究する

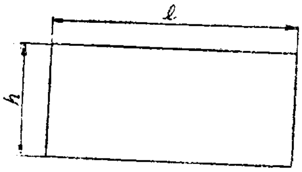

圖-1

l は相當長くて流れ（幹線の）は h の方向にのみ流れるものと假定する．（實際には兩端に近い部分では l の方向に流れるのであらう.）

なほ此の模型に就て以上の外に次の諸假定を設ける．

---

* 東海科學專門學校教授

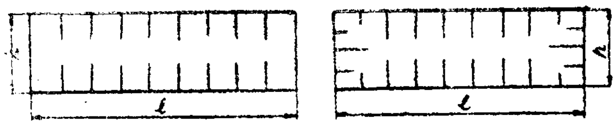

圖-2

假定 1. 同級の流れ同志は相平行し，其一級上の幹線とは直交する．

今幾個かの要素（例へば水）が集つて小流が出來た場合之等小流は互に平行に流れ，之に直交して流れる一級上の幹線に集められる．之等幹線を亦同樣の操作により遂に最後の大幹線に集められて入海するといふのである．此平行流及直交流の假定は相當勝手な假定で實際には或角度を以て斜交する場合が多い（例へば木の葉の如き）が一應簡單の爲以上の如き假定をする．

假定 2. 抵抗と流量の關係を下の如く假定する．

R を抵抗．Q を要素の集中量，p を常數係數とすれば

$$R=Q^p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

要素が多く集中する程單位流量當抵抗が減ずる場合には p の値は 1 より小なる正數である．

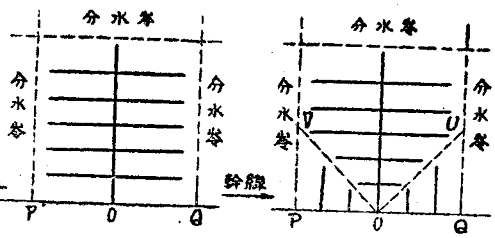

圖-3

假定 3. 三角狀末端面の影響を省略する．

流れ AO は一級上の幹線 POQ の支流とし，之には更に多くの小枝が流入するが實際には AO の落口 O を起點として發する斜の分水線 OV 及 OU を境として一方の側は支流 OA に，他の側は直接幹線 POQ に流下する．然し AO が若し相當に長い時には三角狀末端面 OVP 並に OUQ の面積は AO の全流域に比すれば小になるのに，之の影響は計算上甚しく複雜となるので之を省き，此部分の要素も亦一應 AO に落つるものと假定する．

以上の諸假定の下に各級支流の數（從つて間隔，長さ）を求むるのが本問題の主眼である．

（2） 各級支流間の間隔，延長，流域面積間の關係

1. 同級の流れの平行性，幹支流の直交性の假定より幾何學的に各級支流の長さと間隔等の間に下の如き關係を生ずる．但し分水嶺は常に中央にあり．要素は之を背として兩方に向つて對稱的に流れるものと假定する．

$m_1, m_2, \cdots\cdots, m_r$ 各級の流れに流入すべき派線の數

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r$ 各級の流れ相互の間の間隔

$$\left.\begin{aligned} l&=m_1a_1\\ \frac{h}{2}&=m_2a_2\\ \frac{a_1}{2}&=m_3a_3 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

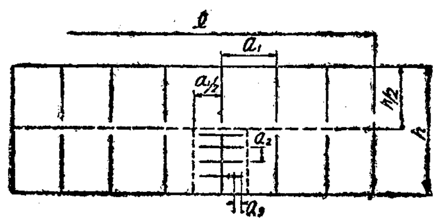

圖-4

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a_2}{2}=m_4a_4\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\frac{a_s}{2}=m_{s+2}a_{s+2}\end{aligned}\right\}$$

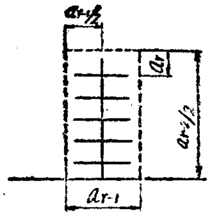

圖-5

2. 次に α を以て要素が先の假定通り流れる最小限の面積とする．即ち α 以下の面積内では要素は特殊の流れ方をなし其抵抗は一般に甚しく大きいと考へられる．而して α は一般に小さい面積と考へられる．

$$\frac{a_ra_{r-1}}{2}=\alpha \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) より　$l=m_1a_1=2m_1m_3a_3=\cdots\cdots=2^{r-2/2}m_1m_3\cdots\cdots m_{r-1}a_{r-1}$

$h=2m_2a_2=2^2m_2m_4a_4=\cdots\cdots=2^{r/2}m_2m_4m_6\cdots\cdots m_ra_r$

$$\therefore\quad lh=2^{r-1}m_1m_2\cdots\cdots m_ra_{r-1}a_r=2^rm_1m_2\cdots\cdots m_r\alpha \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

之等より

$$\left.\begin{aligned}a_1&=\frac{l}{m_1}\\a_3&=\frac{l}{2m_1m_3}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{r-3}&=\frac{l}{2^{r-4/2}m_1m_3\cdots\cdots m_{r-5}m_{r-3}}\\a_{r-1}&=\frac{l}{2^{r-2/2}m_1m_3\cdots\cdots m_{r-1}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)_1\qquad\left.\begin{aligned}a_2&=\frac{h}{2m_2}\\a_4&=\frac{h}{2^2m_2m_4}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{r-2}&=\frac{h}{2^{r-2/2}m_2m_4\cdots\cdots m_{r-2}}\\a_r&=\frac{h}{2^{r/2}m_2m_4\cdots\cdots m_r}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)_2$$

(4) 式により m_r の値は他の $m_1,\cdots\cdots,m_r$ の函数として求められる．依て未知數は $m_1,m_2,,\cdots\cdots m_{r-1}$ の $r-1$ 個の m の値と r 自身とである．

(3)　$m_1,m_2,\cdots\cdots,m_{r-1}$ の値の決定法

未知數 $m_1,m_2,\cdots\cdots m_{r-1}$ を決定するには先ず流は常に抵抗の總和が最小になる樣に流れると假定する．其爲には lh 區域内全面積の流れの總抵抗を計算し，之を $m_1,m_2,\cdots\cdots m_r$ 及 r 自身の函數と考へ其極小値を求むればよい．

1. 抵抗の計算

幹線 (A_1) に對して幹線への落口（河口）に於ける流域面積

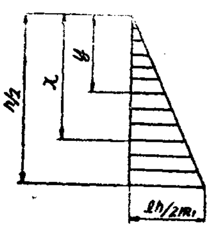

圖-6

(2) により　$$\frac{a_1h}{2}=\frac{lh}{2m_1}$$

任意の點 x に於ける要素の集中面積は

$$\frac{lh}{2m_1}\times\frac{x}{h/2}=\frac{l}{m_1}x$$

依て上流より河口に到る迄の抵抗の和は

$$f=\int_0^{h/2}\left(\frac{l}{m_1}x\right)^p dx=\left(\frac{l}{m_1}\right)^p\frac{h^{p+1}}{2^{p+1}(p+1)}$$ [1]

一般に任意の支線より流入して來た要素が幹線を流下して河口に達する迄に受ける抵抗の合計は

$$\int_y^{h/2}\left(\frac{l}{m_1}x\right)^p dx=\frac{1}{p+1}\left(\frac{l}{m_1}\right)^p\left(\frac{h^{p+1}}{2^{p+1}}-y^{p+1}\right)$$

而して支流の或者は幹線の上流部に落ちるものあり，下流部に落ちるものあり樣々である．依て全體を考へる時には其平均値を取る必要がある．今幹線に於ける平均抵抗を f_1 とすれば，

$$f_1=\frac{1}{h/2}\int_0^{h/2}\left[\int_y^{h/2}\left(\frac{l}{m_1}x\right)^p dx\right]dy=\left(\frac{l}{m_1}\right)^p\frac{1}{p+2}\frac{h^{p+1}}{2^{p+1}}$$

面積 lh 內全體の總抵抗を F_1 とすれば

$$F_1=2mf_1=\frac{l^p h^{p+1}}{2^p(p+2)}m_1^{1-p} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)_1$$

支流 A_2 に對して

河口に於ける流域面積 $\quad \dfrac{a_1a_2}{2}=\dfrac{lh}{2^2m_1m_2}$

任意の點に於ける集中量 $\quad \dfrac{lh}{2^2m_1m_2}\dfrac{x}{a_1/2}=\dfrac{hx}{2m_2}$

平均抵抗 f_2 は $\quad f_2=\displaystyle\int_0^{a_1/2}\int_y^{a_1/2}\left(\frac{hx}{2m_2}\right)^p dxdy=\frac{1}{p+2}\left(\frac{h}{2m_2}\right)^p\left(\frac{l}{2m_1}\right)^{p+1}$

lh 面積內全抵抗 F_2 は $\quad F_2=2^2m_1m_2f_2=\dfrac{h^pl^{p+1}}{2^{2p-1}(p+1)}m_1^{-p}m_2^{1-p} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)_2$

一般に

支流 A_{s-1}（奇數番目） $\quad F_{s-1}=\dfrac{l^ph^{p+1}(m_1m_3\cdots\cdots m_{s-1})^{1-p}(m_2m_4\cdots\cdots m_{s-2})^{-p}}{2^{(s-1)p-\frac{s-2}{2}}(p+2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)_3$

支流 A_s （偶數番目） $\quad F_s=\dfrac{h^pl^{p+1}(m_1m_3\cdots\cdots m_{s-1})^{-p}(m_2m_4\cdots\cdots m_s)^{1-p}}{2^{sp-s/2}(p+2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)_4$

支流 A_{r-1}（奇數番目）と假定すれば

$$F_{r-1}=\frac{l^ph^{p+1}(m_1m_3\cdots\cdots m_{r-1})^{1-p}(m_2m_4\cdots\cdots m_{r-2})^{-p}}{2^{(r-1)p-\frac{r-2}{2}}(p+2)} \quad \cdots\cdots\cdots(6)_5$$

2. 最小單位面積 α 內に於ける抵抗

此區域內では既に今迄假定されて居た各地域の平等性が通用しなくなる．即ち例を伏流水に取れば粒の大きさが無視出來なくなる場合である．此場合の抵抗を今迄同樣の假定により計算した場合の c 倍とする．$c=1$ なる場合は此區域內の抵抗がなほ數値的に今迄の假定の時と等しい事を意味する．

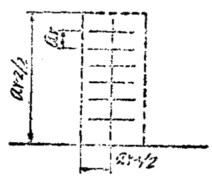

圖 7

支流 A_r

河口に於ける流域面積 $\quad \dfrac{a_{r-1}a_r}{2}=\alpha$

1) 抵抗は其點に於ける要素の集中量（河川なら流量）の p 乘に正比例するものとして計算した．（假定 2 より）

任意の點　$\alpha \times \dfrac{x}{a_{r-1}/2}$

平均抵抗　$f_r = \dfrac{1}{a_{r-1}/2}\int_0^{a_{r-1}/2}\int_0^{a_{r-1}/2} C\left(\dfrac{\alpha x}{a_{r-1}/2}\right)^p dxdy = \dfrac{c\,\alpha^p l}{(p+2)2^{r/2} m_1 m_3 \cdots m_{r-1}}$

全抵抗　$F_r = \dfrac{lh}{\alpha} f_r = \dfrac{cl^2 h}{(p+1)2^{r/2}}(m_1 m_3 \cdots\cdots m_{r-1})^{-1}$ ……………………………… $(6)_6$

3. **總抵抗**　$F = F_1 + F_2 + \cdots\cdots + F_{r-1} + F_r$ ……………………………… (8)

之を獨立變數 $m_1, m_2, \cdots\cdots m_{r-1}$ で微分して零と置く.

m_1 による微分

$$\frac{\partial F_1}{\partial m_1} = \frac{l^p h^{p+1}}{2^p(p+2)}(1-p)m_1^{-p} = \frac{1-p}{m_1}F_1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial m_1} = \frac{l^{p+1}h^p}{2^{2p-1}(p+2)}(-p)m_1^{-p-1}m_2^{1-p} = -\frac{p}{m_1}F_2$$

……………………

$$\frac{\partial F_{s-1}}{\partial m_1} = \frac{(1-p)}{m_1}F_{s-1}$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial m_1} = -\frac{p}{m_1}F_s$$

……………………

$$\frac{\partial F_{r-1}}{\partial m_1} = \frac{1-p}{m}F_{r-1}$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial m_1} = -\frac{c\,l^2 h\,\alpha^{p-1}m_1^{-1}(m_1 m_3\cdots\cdots m_{r-1})^{-1}}{(p+2)2^{r/2}} = -\frac{p}{m_1}F_r$$

一般に

奇數番目 m_{r-1} による微分

$$\frac{\partial F_1}{\partial m_{i-1}} = \frac{\partial F_2}{\partial m_{i-1}} = \cdots\cdots = \frac{\partial F_{i-2}}{\partial m_{i-1}} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{i-1}}{\partial m_{i-1}} = \frac{1-p}{m_{i-1}}F_{i-1}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial m_{i-1}} = -\frac{p}{m_{i-1}}F_i$$

……………………

$$\frac{\partial F_{r-2}}{\partial m_{i-1}} = -\frac{p}{m_{i-1}}F_{r-2}$$

$$\frac{\partial F_{r-1}}{\partial m_{i-1}} = \frac{1-p}{m_{i-1}}F_{r-1}$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial m_{i-1}} = -\frac{1}{m_{i-1}}F_r$$

偶數番目 m_r による微分

$$\frac{\partial F_1}{\partial m_i} = \frac{\partial F_2}{\partial m_i} = \cdots\cdots = \frac{\partial F_{i-1}}{\partial m_i} = 0,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial m_i} = \frac{1-P}{m_i}F_i$$

$$\frac{\partial F_{i+1}}{\partial m_i} = -\frac{p}{m_i}F_{i+1}$$

……………………

$$\frac{\partial F_{r-2}}{\partial m_i} = \frac{1-p}{m_i}F_{r-2}$$

$$\frac{\partial F_{r-1}}{\partial m_i} = -\frac{p}{m_i}F_{r-1}$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial m_i} = 0$$

而して (8) より

$$\frac{\partial F}{\partial m_1} = \frac{\partial F_1}{\partial m_1} + \frac{\partial F_2}{\partial m_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial F_{r-1}}{\partial m_1} + \frac{\partial F_r}{\partial m_1}$$

$$= \frac{1-p}{m_1}F_1 - \frac{p}{m_1}F_2 + \cdots\cdots + \frac{1-p}{m_1}F_{r-1} - \frac{1}{m_1}F_r = 0$$

$$\therefore \quad (1-p)(F_1+F_3+\cdots\cdots+F_{i-1}+F_{r-1})-p(F_2+F_4+\cdots\cdots+F_{r-2})-F_r=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)_1$$

同様にして m_2 で微分した場合には

$$\frac{\partial F}{\partial m_2}=\frac{\partial F_1}{\partial m_2}+\frac{\partial F_2}{\partial m_2}+\cdots\cdots+\frac{\partial F_{r-1}}{\partial m_2}+\frac{\partial F_r}{\partial m_2}=0$$

之より

$$(1-p)(F_2+F_4+\cdots\cdots+F_{r-2})-p(F_3+F_5+\cdots\cdots+F_{r-1})=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)_2$$

同様にして一般に下の諸式を得る.

$$(1-p)(F_{i-1}+F_{i+1}+\cdots\cdots+F_{r-1})-p(F_i+F_{i+2}+\cdots\cdots+F_{r-2})-F_r=0 \quad \cdots\cdots(9)_3$$

$$(1-p)(F_i+F_{i+2}+\cdots\cdots+F_{r-2})-p(F_{i+1}+F_{i+3}+\cdots\cdots+F_{r-1})=0 \quad \cdots\cdots(9)_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-p)F_{r-2}-pF_{r-1}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)_5$$

$$(1-p)F_{r-1}-F_r=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)_6$$

$(9)_1, (9)_2, (9)_3, (9)_4, (9)_5, (9)_6$ の諸式より下の結果を得る.

$$\left.\begin{aligned}
F_1&=\frac{p^{r-2}}{(1-p)^{r-1}}F_r\\
F_2&=\frac{p^{r-3}}{(1-p)^{r-2}}F_r\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_i&=\frac{p^{r-(i+1)}}{(1-p)^{r-i}}F_r\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_{r-2}&=\frac{p}{(1-p)^2}F_r\\
F_{r-1}&=\frac{1}{1-p}F_r
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(10)
\qquad
\left.\begin{aligned}
F_1&=\frac{p}{1-p}F_2\\
F_2&=\frac{p}{1-p}F_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_{i-1}&=\frac{p}{1-p}F_i\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_{r-2}&=\frac{p}{1-p}F_{r-1}\\
F_{r-1}&=\frac{1}{1-p}F_r
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

4. 極値の吟味

以上の結果は何れも F を變數 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_{r-1}$ で一次微分して零と置いて得られたもので, 之が果して極小値なりや否や一應吟味を要する.

先づ m_1 について二次微分すれば

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_1^2}=\frac{\partial^2 F_1}{\partial m_1^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial m_1^2}+\cdots\cdots+\frac{\partial^2 F_{r-1}}{\partial m_1^2}+\frac{\partial^2 F_r}{\partial m_1^2}$$

$$=\frac{p}{m_1^2}(F_2+F_4+\cdots\cdots+F_{r-2})+\frac{F_r}{m_1^2}(1-p) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)_1$$

p を 1 より小なる正數とすれば $F_2, F_4, \cdots\cdots, F_{r-2}$ 及 F_r は何れも抵抗量を表す故正である.

$\therefore \ \dfrac{\partial^2 F}{\partial m_1^2}>0$ となり極小値を表はす.

次に m_2 について二次微分すれば

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_2^2}=\frac{(1-p)^2}{m_2^2}\{F_2+F_4+\cdots\cdots F_{r+2}\}+\frac{p^2}{m_2^2}\{F_3+F_5+\cdots\cdots+F_{r-1}\}_1>0 \quad\cdots\cdots(12)_2$$

∴ 極小値を表はす.

一般に奇數番目の變數 m_{i-1} で二次微分した場合には

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_{i-1}^2}=\frac{p}{m_{i-1}^2}(F_i+F_{i+2}+\cdots\cdots+F_{r-2})+\frac{F_r}{m_{i-1}^2}(1-p)>0 \quad\cdots\cdots(12)_3$$

偶數番目の變數 m_i の場合には

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_i^2}=\frac{(1-p)^2}{m_i^2}\{F_i+F_{i+2}+\cdots\cdots+F_{i-2}\}+\frac{p^2}{m_i^2}\{F_{i+1}+F_{i+3}+\cdots\cdots+F_{r-1}\}>0 \quad\cdots\cdots(12)_4$$

依て何れの場合も極小値を表はす. かくてあらゆる場合に就て極小値である事が證明せられた譯である.

5. m_1 の値の計算

(11) 式より

$$\frac{p}{1-p}=\frac{F_1}{F_2}=\frac{\dfrac{l^p h^{p+1}}{2^p(p+2)}m_1^{1-p}}{\dfrac{h^p l^{p+1}}{2^{2p-1}(p+2)}m_1^{-p}m_2^{1-p}}=\frac{2^{p-1}h}{l}m_1 m_2^{p-1} \quad\cdots\cdots(13)_1$$

$$\frac{p}{1-p}=\frac{F_2}{F_3}=\frac{\dfrac{h^p l^{p+1}}{2^{2p-1}(p+2)}m_1^{-p}m_2^{1-p}}{\dfrac{l^p h^{p+1}}{2^{3p-1}(p+2)}m_1^{1-p}m_2^{-p}m_3^{1-p}}=\frac{2^p l m_2}{h m_1 m_3^{1-p}} \quad\cdots\cdots(13)_2$$

邊々相乘すれば

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^2=\frac{F_1}{F_3}=2^{2p-1}m_2^p m_3^{p-1} \quad\cdots\cdots(14)_1$$

一般に

$$\frac{p}{1-p}=\frac{F_{i-1}}{F_i}=\frac{2^{p-1}h(m_1 m_3\cdots\cdots m_{i-1})}{l(m_2 m_4\cdots\cdots m_{i-2})m_i^{1-p}} \quad\cdots\cdots(13)_3$$

$$\frac{p}{1-p}=\frac{F_i}{F_{i+1}}=\frac{2^p l(m_2 m_4\cdots\cdots m_i)}{h(m_1 m_3\cdots\cdots m_{i-1})m_{i+1}^{1-p}} \quad\cdots\cdots(13)_4$$

$$\frac{p}{1-p}=\frac{F_{i+1}}{F_{i+2}}=\frac{2p-1h(m_1 m_3\cdots\cdots m_{i+1})}{l(m_2 m_4\cdots\cdots m_i)m_{i+2}^{1-p}} \quad\cdots\cdots(13)_5$$

依て

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^2=\frac{F_{i-1}}{F_{i+1}}=\frac{F_i}{F_{i+2}}=2^{2p-1}m_i^p m_{i+1}^{p+1}=2^{2p-1}m_{i+1}^p m_{i+2}^{p-1} \quad\cdots\cdots(4)_2$$

かくて一般に $m_{i+1}^p m_{i+2}^{p-1}=2^{1-2p}(p/1-p)^2$ であつて此値は i に無關係である. 依て之を常數 k を以て表はす.

$$k=2^{1-2p}(p/1-p)^2 \quad\cdots\cdots(15)$$

次に $(13)_1$ より

$$m_2^{p-1}=\frac{l}{h}2^{1-p}\left(\frac{p}{1-p}\right)m_1^{-1}=cm_1^{-1} \quad\cdots\cdots(16)$$

但し　　$$c=\frac{l}{h}2^{1-p}\left(\frac{p}{1-p}\right) \qquad \cdots\cdots (17)$$

(14)₂ 及 (15) より

$$m_2^p m_3^{p-1}=m_3^p m_4^{p-1}=\cdots\cdots=m_{r-2}^p m_{r-1}^{p-1}=k$$

之等により m の値を逐次計算すれば

$$\left.\begin{aligned}
m_2&=C^{1/p-1}m_1^{-1/p-1}\\
m_3&=k^{1/p-1}C^{-p/(p-1)^2}m_1^{p/(p-1)^2}\\
m_4&=k^{1/p-1\left\{\frac{1-(-p/1-p)^2}{1-(-p/1-p)}\right\}}C^{(-p)^2/(p-1)^3}m_1^{-(-p)^{i-2}/(p-1)^{i-1}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_i&=k^{1/p-1\left\{\frac{1-(-p/1-p)^{i-2}}{1-(-p/1-p)}\right\}}C^{-(-p)^{i-2}/(p-1)^{i-1}}m_1^{-(-p)^{i-2}/(p-1)^{i-1}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_{r-1}&=k^{1/p-1\left\{\frac{1-(-p/1-p)^{r-3}}{1-(-p/1-p)}\right\}}C^{-(-p)^{r-3}/(p-1)^{r-2}}m_1^{-(-p)^{r-3}/(p-1)^{r-2}}
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (18)$$

之等 m_1, m_2, m_{r-1} の値より

$$(m_1m_3\cdots\cdots m_{r-1})^{-1}=2^{\frac{r-2}{2}}(p/1-p)^{-\frac{r-2}{2p-1}-\frac{rp}{(2p-1)^2}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}}$$

$$\times\left(\frac{l}{h}\right)^{\frac{-p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}}m_1^{-1+\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}} \qquad \cdots\cdots (19)$$

$(m_1m_2\cdots\cdots m_{r-1})$ の値の計算

2 の指數

$$-(r-3)-\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{+p}{1-p}\right)^{r-3}\right\}+\frac{1-p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}=2-r$$

$\left(\frac{-p}{1-p}\right)$ の指數

$$\frac{2(r-3)}{2p-1}+\frac{2p}{(2p-1)^2}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}+\frac{1}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}$$

$$=\frac{2(r-2)}{2p-1}+\frac{1}{(2p-1)^2}\left\{1-\left(\frac{+p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}$$

$\left(\frac{l}{h}\right)$ の指數

$$\frac{1}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}$$

m_1 の指數

$$1-\frac{1}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{+p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}$$

$$\therefore\quad (m_1m_2m_{r-1})=2^{2-r}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{2(r-2)}{2p-1}+\frac{1}{(2p-1)^2}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}}$$

$$\times\left(\frac{l}{h}\right)^{\frac{1}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}}m_1^{1-\frac{1}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}} \qquad \cdots\cdots (20)$$

次に $(13)_1, (13)_2, \cdots\cdots(13)_5$ より

$$F_1=F_1,\quad F_2=\frac{1-p}{p}F_1,\cdots\cdots F_i=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{i-1}F_1,\cdots\cdots,F_{r-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-2}F_1,$$

$$F_r=(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-2},$$

$$\therefore\quad F=\sum_{i=1}^{r-1}F_i+F_r=F_1\left\{1+\left(\frac{1-p}{p}\right)+\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-2}\right\}+F_1(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-2}$$

$$=\frac{pF_1}{2p-1}\left\{1-2(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-1}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

然るに (6) より

$$F_1=\frac{l^p h^{p+1}}{2^p(p+2)}m_1^{1-p}$$

$$\therefore\quad F_r=(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-2}\times\frac{l^p h^{p+1}}{2^p(p+2)}m_1^{1-p}$$

又 $(6)_6$ 及 (19) により

$$F_r=\frac{cl^2h\,\alpha^{p-1}}{(p+2)2^{r/2}}(m_1m_3\cdots\cdots m_{r-1})^{r-1}=\frac{cl^2h\,\alpha^{p-1}}{(p+2)2^{r/2}}2^{\frac{r-2}{2}}m_1^{-1+\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}}$$

$$\times\left(\frac{p}{1-p}\right)^{-\frac{(r-2)}{2p-1}-\frac{p}{(2p-1)^2}\left\{1-\left(\frac{-p}{p-1}\right)^{r-2}\right\}}\left(\frac{l}{h}\right)^{-\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}}$$

$$=(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-2}\frac{l^p h^{p+1}}{2^p(p+2)}m_1^{1-p}$$

之より m_1 を求むれば

$$m_1=\frac{l}{h}\left(\frac{c}{1-p}\right)^{\frac{1}{2-p-\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}}}\left(\frac{h^2}{2\alpha}\right)^{\frac{1-p}{2-p-\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}}}$$

$$\times\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{2p-1}+\frac{1}{2p-1}\times\frac{2r(p-1)-3p+2}{2-p-\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

6. 以上で明な如く m_1 の値の中には變數 m 自身の數 r が含まれてゐる. 依て豫め r が與へられて居る場合の他は, 果して變數の數が幾個の場合に總抵抗 F が最小になるかを求めなくてはならない.

(21), (6) により

$$F=\frac{p}{1-p}\left\{1-2(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-1}\right\}F_1,\quad F_1=\frac{l^p h^{p+1}}{2^p(p+2)}m_1^{1-p}$$

F を r で微分して零と置く.

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{p}{2p-1}\left\{1-2(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-1}\right\}\frac{\partial F_1}{\partial r}+\frac{p}{2p-1}F_1\left\{-2(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{r-1}\log\left(\frac{1-p}{p}\right)\right\}=0$$

展開して整理すれば

$$\left\{\frac{2(1-p)^2}{2p-1}-\frac{p}{2p-1}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}\left\{A(p)-\frac{2r(1-p)^2}{2p-1}\log\frac{p}{1-p}\right\}=0$$

但し

$$A(p)=(1-p)\log\frac{c\alpha^{p-1}}{1-p}-(1-p)^2\log 2+2(1-p)^2\log h+\frac{1-p}{2p-1}(-3p+2)\log\frac{p}{1-p}$$

之より

$$r=2+\frac{\log\left(\frac{2(1-p)^2}{p}\right)}{\log\left(\frac{p}{1-p}\right)} \quad\cdots\cdots\cdots(23)_1$$

or

$$r=\frac{(2p-1)A(p)}{2(1-p)^2\log\left(\frac{p}{1-p}\right)} \quad\cdots\cdots\cdots(23)_2$$

然るに p を 1 より小な正數とすれば $\dfrac{\log\frac{2(1-p)^2}{p}}{\log\left(\frac{p}{1-p}\right)}$ は常に負となる. 依て $(23)_1$ の値は本問題の要求に適せぬ故捨てる.

$(23)_2$ 式を變形すれば

$$\frac{h^2}{2\alpha}=\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{2r(1-p)+3p-2}{(1-p)(2p-1)}}\left(\frac{c}{1-p}\right)^{\frac{r-1}{1-p}} \quad\cdots\cdots\cdots(24)$$

之を (22) 式に代入して整理すれば

$$m_1=\frac{l}{h}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{2p-1}} \quad\cdots\cdots\cdots(25)$$

7. m_2 以下の計算

(15), (17), (18) より

$$m_2=\left(\frac{l}{h}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}2^{-1}m_1^{\frac{-p}{p-1}}=2^{-1}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{2}{2p-1}}$$

$$m_3=\left\{2^{1-2p}\left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right\}^{\frac{1}{p-1}}m_2^{\frac{-p}{p-1}}=2^{-1}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{2}{2p-1}}$$

一般に

$$m_2=m_3=m_4=\cdots\cdots=m_{r-1}=2^{-1}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{2}{2p-1}} \quad\cdots\cdots\cdots(26)$$

即ち m_2 以下は相互に相等しく且 l と h とに無關係である.

8. m_r の値

(4) 式より

$$m_r=\frac{1}{2^r m_1 m_2\cdots\cdots m_{r-1}}\left(\frac{lh}{\alpha}\right) \quad\cdots\cdots\cdots(4)_1$$

$(4)_1$, (25), (26) より下式を得る.

$$m_r=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{(1-p)(2p-1)}}\left(\frac{c}{1-p}\right)^{\frac{-1}{1-p}} \quad\cdots\cdots\cdots(27)$$

9. 各級の m 及 r の表

(25), (26), (27) より各級の m の値を計算すれば下表の如くなる．但し 27) 式の c の値は 1 として計算してある．

p	$m_1/(l/h)$	m_2 乃至 m_{r-1}	m_r	p	$m/(l/h)$	m_2 乃至 m_{r-1}	m_r
0.10	15.5	120.1	9.4	0.60	7.6	28.8	8.0
0.20	10.1	50.5	6,7	0.70	8.3	34.5	10.4
0.30	8.3	34.5	6.2	0.80	10.1	51.0	16.5
0.40	7.6	28.8	6.3	0.90	15,5	120.1	42.0
0.50	7.4	27.4	6.9				

次に $(23)_2$ より r を計算すれば下表の如くなる．

p \ $\log_{10}\frac{h^2}{2\alpha}$	2	3	4	5	6	8	10	∞
0.10	1.8	2.2	2.8	3.1	3.5	4.4	5.2	∞
0.20	1.9	2.4	2.6	3.4	3.9	4.9	5.9	〃
0.30	2.0	2.5	3.1	3.6	4.2	5.3	6.4	〃
0.40	2.0	2.6	3.2	3.7	4.3	5.5	6.6	〃
0,50	2.0	2.6	3.2	3.7	4.3	5.5	6.6	〃
0.60	2.0	2.5	3.1	3.7	4.2	5.4	6.6	〃
0.70	1.9	2.4	3.0	3.5	4.0	5.1	6.2	〃
0.80	1.7	2.2	2.7	3.2	3.7	4.7	5.7	〃
0.90	1.5	1.8	2.4	2.6	3.2	4.1	4.9	〃

註　上表によれば r は $h^2/2\alpha$ の値により可成り變化するが r の値に對應する m の値は $h^2/2\alpha$ に無關係である．而して r は一般に整數では無い．併し r は支派線の階級の數であるから實際の値は正の整數でなければならない．依て先の計算によつて得た帶小數値に最も近い二整數に就いて實際の抵抗の總和を比較計算して判定する外はない．

10. 實際の場合の $\overline{m}_1$ の値

r を變數とした場合，$\overline{m}_1$ の値としては $(23)_2$ を (22) に代入することにより $(25)_1$ 式を得る．

$$m_1=\left(\frac{l}{h}\right)\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{2p-1}}=\overline{m}_1 \quad \cdots\cdots\cdots (25)_1, \qquad r=\frac{(2p-1)A(p)}{2(1-p)^2\log\frac{p}{1-p}} \quad \cdots\cdots\cdots (23)_2$$

となる．今之を $\overline{m}_1$ と置く．

然るに實際には r は正の整數でなくてはならない．依て r を帶小數のまゝ代入して得た値には補正が加へられなければならない．

r'；計算から出た r の値 (帶小數)．即ち

$$r'=\frac{(2p-1)A(p)}{2(1-p)^2\log\frac{p}{1-p}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

x；補正値．

$$x=s-r' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

$\overline{m}_1$； 理論上の r の値．即ち r' を (22) 式に代入して得た m_1 の値．

m_1； r の代りに s を (22) 式に代入して得た m_1 の値．

s: 代入すべき r の値 (正の整數値)．

s を (22) 式に代入して整理すれば ((24) を用ひて)

$$m_1=\overline{m}_1\times\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{-2x(1-p)}{(2p-1)(2-p)-p\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}}} \quad\cdots\cdots(30)$$

11. 判　　別

然るに r' の兩側の二整數の中總抵抗 F を小ならしめる方が眞の値である．

$$F(s)=\frac{p}{(2p-1)}\left\{1-2(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{s-1}\right\}\frac{l^p h^{p+1}}{2^p(p+2)}\overline{m}_1^{1-p}$$

$$\times\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{2x(1-p)}{(2p-1)(2-p)-p\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{s-2}\right\}}}$$

$$F(s-1)=\frac{p}{2p-1}\left\{1-2(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{s-2}\right\}\frac{l^p h^{p+1}}{2^p(p+2)}\overline{m}_1^{1-p}$$

$$\times\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{-2(x-1)(1-p)^2}{(2p-1)(2-p)-p\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{s-8}\right\}}}$$

$F(s), F(s-1)$ の大きさを比較するには兩者とも正數 (抵抗の値故) であるから其比の對數の正負によつて判定すればよい．即ち對數が負であれば s，正であれば $s-1$ が適價といふ事になる．

$$\log\frac{F(s)}{F(s-1)}=\log\frac{p^{s-1}-2(1-p)^s}{p^{s-1}-2p(1-p)^{s-1}}+\frac{2(1-p)^2+(p/1-p)^{s-2}\{(2p-1)x-p\}}{2(1-p)^2-(p/1-p)^{s-2}+1/2(p/1-p)^{2s-3}}\log\frac{p}{1-p}$$

$$\cdots\cdots(31)$$

註 s は 2 以上とする．$s=1$ の場合は特別に取扱ふを要する．かくて r の正の整數値に對應する m_1 の値を計算すれば下表の如くなる．(表 12) 之によれば m_1 の値は相當 $h^2/2\alpha$ の値に影響されるのを知る．

12. m_1 の實際の値

$m_1=m_1'(l/h)$ として m_1' の表を掲げる．

m_1' の表

p \ $\log_{10}\frac{h^2}{2\alpha}$	2		3		4		5		6		8		10		∞	
	s	m'	s	m'	s	m'	s	m'	s	m'	s	m'	s	m'	s	m'
0.10	2	9.4	2	27.6	3	6.3	3	17.4	4	4.4	5	2.6	5	[illegible]	∞	16.3
0.20	2	8.8	3	3.6	3	8.8	4	3.6	4	8.7	5	8.8	6	8.7	〃	11.1
0.30	2	8.2	3	4.3	3	[illegible]	4	5.2	4	10.4	5	11.4	6	12.7	〃	9.6
0.40	2	7.8	3	4.8	3	8.9	4	5.9	4	9.8	6	4.8	7	5.5	〃	8.7
0.50	2	7.4	3	5.3	3	8.4	4	6.4	4	8.3	6	6.1	7	6.6	〃	7.4
0.60	2	7.2	3	4.9	3	6.8	4	6.3	4	7.5	5	7.4	7	6.6	〃	7.7
0.70	2	7.3	2	12.4	3	6.4	4	7.1	4	7.7	5	7.9	6	8.4	〃	8.3
0.80	2	8.2	2	12.0	3	7.4	3	8.1	4	9.3	5	10.9	6	10.1	〃	10.1
0.90	2	11.8	2	14.8	3	12.1	3	12.2	3	12.7	4	15.2	5	15.5	〃	15.5

13. m_2 の表

(17) (18) 及 (30) により

$$m_2 = 2^{-1}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{2}{2p-1}+\frac{-2x}{(2p-1)(2-p)-p\left\{1-p\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}}}$$

となつて l に無關係である．12 節の m_1 の表に對應すべき m_2 の表は下の通である．

m_2 の表

p \ $\log_{10}\frac{h'}{2\alpha}$	2	3	4	5	6	8	10	∞
0.1	5.3	18.1	45.7	14.1	30.2	19.6	6.1	120.0
0.2	5.7	14.0	42.9	15.5	44.7	39.5	43.2	5.1
0.3	6.1	3.9	40.6	17.4	46.8	54.9	63.0	4.5
0.4	6.5	13.9	38.6	18.9	44.3	13.7	16.9	28.5
0.5	6.8	13.9	38.3	19.9	38.5	18.0	21.5	27.5
0.6	7.0	14.0	38.1	23.1	34.4	34.0	26.5	23.8
0.7	6.9	40.3	38.1	27.5	35.4	36.7	32.7	34.5
0.8	6.1	41.7	38.7	59.0	47.2	50.0	51.0	51.0
0.9	4.2	34.5	86.0	136.0	136.0	121.0	101.0	120.0

(4) 特別の p の場合

今迄 p が 0 と 1 との間の場合についてのみ研究したが本節には p の特別の値に就いて考究する．

1. p が負の場合

イ．抵抗が要素の集積とともに反つて其絕對値に於ても減少する場合で實際には滅多に無いと思はれるも特別の場合として一應考究して置く．

第 (3) 節と同樣の方法により F を m で二次微分すれば

i が偶數なる場合．p は負數なる故

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_i^2} = \frac{(1-p)^2}{m_i^2}\{F_i + F_{i+2} + \cdots\cdots + F_{r-2}\} + \frac{p}{m_i^2}\{F_{i+1} + F_{i+3} + \cdots\cdots + F_{r-1}\} > 0$$

依て $\frac{\partial F}{\partial m_i} = 0$ に依つて求められた値は極小値を表はす．

$i-1$ の場合（奇數）

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_{i-1}^2} = \frac{p}{m_{i-1}^2}\{F_i + F_{i+2} + \cdots\cdots + F_{r-2}\} + \frac{F_{i-1}}{m_{i-1}^2}(1-p)$$

となつて第二項は明に正なるも第一項は負となり必ずしも極小値を表はすとは限らない．

ロ．前節の (22) 式により m_1 の値は

$$m_1 = \left\{\frac{c\alpha^{p-1}\nu^{p-1}}{1-\alpha}\right\}^{\frac{1}{2-p-\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}}} lh^{-1+\frac{2(1-p)}{2-p-\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}}}$$

$$\times\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{2p-1}-\frac{2r(p-1)-3p+2}{(2p-1)\left[2-p-\frac{p}{2p-1}\left\{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{r-2}\right\}\right]}} \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

上式に於て p は負であるから $\left(\frac{p}{1-p}\right)$ も負となる．依て第一，第二因數は何れも實數値であるが第三因數は其指數が整數の場合の外は一般に複素數となる．m_i は枝線の分岐數であるから正の數でなければならないから特殊な場合を除き解は無い．

かくて p が負の場合は一般には解が無い事が明になつた．

2. p が1より大なる實數の場合

此場合は要素が集中すればする程其抵抗が單位量當についても增加する場合で此場合も實際には先づ無いと考へられるがなほ一應吟味をしやう．

偶數番目の變數 m_i の場合

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_i^2}=\frac{(1-p)^2}{m_i^2}\{F_i+F_{i+2}+\cdots\cdots+F_{r-2}\}+\frac{p^2}{m_i^2}\{F_{i+1}+F_{i+3}+\cdots\cdots+F_{r-1}\}>0$$

依て極小値である．

奇數番目の場合

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m_{i-1}^2}=\frac{p}{m_{i-1}^2}\{F_i+F_{i+2}+\cdots\cdots+F_{r-2}\}+\frac{F_r}{m_{i-1}}(1-p)$$

となつて第一項は正であるが第二項は負となつて必ずしも極小値を表はすとは限らない．

更に (22) 式により m_1 の値を吟味するに其因數の中 $\left\{\frac{c\alpha^{p-1}2^{p-1}}{1-p}\right\}$ 及 $\left(\frac{p}{1-p}\right)$ は何れも負となつて其指數が整數である場合の外は複素數となる 然るに m_i は既記の如く正の整數でなければならない．依て實際の流は存在しない．

II. 樹枝狀組織の生成

(1) 勾配の觀念

凡そ或要素が甲地より乙地に向つて移動を起すには甲乙兩地間に或力が働いて之が途中の抵抗に打勝つた場合である．物により力が或程度以上に達する迄は移動は起らず或限度を超すと急に起るものと，どれだけ小さな力でも之に應ずる小さな速度で移動が起るものとある．後者の場合は勿論のこと，前者の場合でも移動の量（從つて速度）は力が大きくなればなる程大になるのが一般であつて正しく正比例する場合も自然界には少くない．

此甲乙二點間に働く力は其二點のみについて起り，其途中には直接關係ない場合と其途中の壓力差に關係する場合とある．（後者の場合には途中の壓力差の合計が甲乙兩地點間の力となる．）即ち後者に於ては力の地理的長さに對する微分，即ち勾配の觀念が入る．

一例として中央の上官（甲地）から現地の役人（乙地の要素）に本應集合を命じた場合，乙地の役人は途中の抵抗（旅費，其他）を克服して甲地に赴かねばならない．即ち此場合移動の原動力は甲地の上官の乙地の下役に對する命令に發して甲乙兩地の中間の地域に力の勾配は考へられな

い．商品の移動も途中の地域的値段の差よりも直接原産地と消費地兩地の價格の差の方による場合が多い．然し多くの自然現象，例へば水，電氣等は明に途中の勾配が進路を定める．即ち概して人文界には前者の型が多く，自然界には後者の型が多い様である．

（2） 樹技狀組織の生成

今乙地の或要素に對して力が作用した場合前者の型では甲地に向つて最小抵抗の線に沿ふて移動が起り，後者の場合には最急勾配の方向に向つて移動を起す．然るに此方向によつて作られた終線は抵抗の面から見れば必ずしも最小抵抗の線ではない．今一例を擧ぐれば水が傾いた平面上を廣く淺く流れる場合より一線に集中して流れた方が抵抗が小くなる．依て先ず最急勾配の方向に廣い巾で流れが起つて後漸次其流が一部分に集中する様になり，其結果流線に於ける *head*（其點より河口に到る抵抗の積算を現す）を著しく低下せしめ，其結果附近の *head* との間に著しい差を生じる．即ち周邊より流線に向つて新しく勾配が出來，附近の各要素は流線に向つて流れ込む様になる．此新に生じた流れも亦先と同一の理によりやがて又一線集中が行はれ，かくて明瞭に技線の形が出來る．

かくの如くして逐次小枝が出來て遂に樹枝狀組織が出來上つたものは樹枝狀構造として最後の形を表すものであらう．之に對し當初の地表の勾配に完全，從つて流れる形を最初の形と見れば一般に自然界に表はれる現象は其中間の過渡的狀態を示すものであらう．道路や都市計畫に於ては屢々最初から最終の姿を見透して建設が企てられる場合が多い，之が行はれぬ場合には非常に長い時間と多くの犧牲を拂つた後漸次最終の姿に向つて自然的に進化するであらう．本論に取扱つた模型一は即ち此最終形の一例である．最初の形については改めて書くことにしやう．

樹枝狀構造の場合に就いてなほ記すべき事が多く殘つて居るが之も紙面の關係上後日に讓り一應之を以て筆を擱く．