四邊固定正方形版の固有振動數の計算に就て

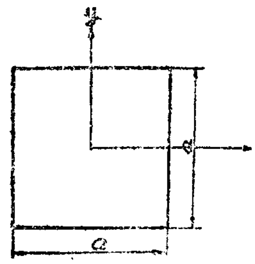
正員 成岡昌夫*

On the Transverse Vibration of a Square Plate clamped at Four Edges.

By Masao Naruoka, C. E., Member

要旨 四邊固定正方形版の基本振動形に對する $\dfrac{\rho h a^4 p^2}{D \pi^4}$ の値を，Timoschenko が等分布荷重を受ける四邊固定矩形版の解法に應用した方法を以つて解いたものである．

四邊固定正方形版の振動の問題は，四邊自由の場合と共に彈性力學に於て興味深い固有値問題である．從つてこの問題は縱横に考察されて來たのであつて，殊に我國では進んでおり，基本振動形に對して $\dfrac{\rho h a^4 p^2}{D \pi^4}$ の値として，妹澤博士は 14.4[1]，加藤博士は 13.26[2]，友近博士は 13.2948[3]，井口博士は $(3.646)^2=13.2933$[4] の値を與へてゐる．この中友近博士の値は Taylor 教授が四邊固定正方形版の挫屈荷重を計算するのに使用した所謂 Taylor の方法[5] を應用して求めたものであり，尙 Weinstein の方法により，$\rho h a^4 p^2/D \pi^4$ の値の眞値に對する下限の數列を計算して，最小値を 13.2940[6] と求め，前記の値の確かさを證明してゐる．井口博士の値は平版の解法に於ける井口の方法を振動問題に應用したものである．從つてこの問題は論ずる餘裕はない樣であるが，Timoschenko が等分布荷重を受ける四邊固定矩形版の解法に使用した方法[7] を以て解けば次の通りである．この方法もその原理に於ては Taylor 教授の方法と異らないのであるが，積分常數間の關係式を取扱ふ點で少しく異つておるので，簡單に報告する．



圖の如く座標軸 x, y の原點を版の中心に置き，その軸方向を邊に平行とし，版の邊長と厚さ

* 京都大學助教授

1) 妹澤克惟 振動學 129—135.

2) 加藤弘 矩形版の屈曲及振動に就て：造船協會々報，**50** (1932) 209—230.

3) S. Tomotika: The Transverse Vibration of a Souare Plate clamped of Four Edges, Phil. Mag., **21** (1936), 745—760

4) S. Iguchi: Die Biegungsschwingen der vierseitige eingespannten rechteckigen Platte, Ing. Archiv, **8** (1937), 11—25.

5) G. I. Taylor: The Buckling Load for a Rectangular Plate with Four Clamped Euges, Zeits. f. angew. Math. Mech., **13** (1933), 147—152.

6) S. Tomotika: On the Transverse Vibration of a Plate with Four Clamped Edges, 航空研究所報告, 129號 (昭和10年), 301—323.

7) S. P. Timoschenko: Bending of Rectangular Plate with Clamped Edges, Proc. 5 Intern. congr. Appl. Mech., Cambridge, (1938).

を夫々 a, h にて表すものとする.

今 w を版の中立面 (midde plane) 上の一點 (x, y) の横變位とすれば，横振動の微分方程式は次式にて與へられる.

$$D\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

玆に　　D＝版剛度，

　　　　ρ＝版の材料の密度

四邊が固定されてゐるものとすれば，境界條件は次の如く表される.

$$\left.\begin{array}{lll} x=\pm\dfrac{a}{2}; & w=0, & \dfrac{\partial w}{\partial x}=0 \\ y=\pm\dfrac{a}{2}; & w=0, & \dfrac{\partial w}{\partial y}=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

版が normal mode で振動してゐるものとすれば，變位 w は

$$w=W\cos(pt+\varepsilon) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

となる. 玆に W は normal 函數である. (3) 式を (1) 式に代入すれば

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-\lambda^4 W=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

但し，　　$$\lambda^4=\frac{\rho h p^2}{D} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

となり，境界條件は

$$\left.\begin{array}{lll} x=\pm\dfrac{a}{2}; & W=0, & \dfrac{\partial W}{\partial x}=0 \\ y=\pm\dfrac{a}{2}; & W=0, & \dfrac{\partial W}{\partial y}=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

となる. 從つて問題は $W=0$ 以外に (6) 式を滿足する (4) 式の解を見出すことである.

扨て，兩軸に對稱的な振動では，W を先づ次の如く表せば，$x=\pm a/2$ にて $W=0$ の條件が滿足される.

$$W_1=\sum_{m=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty} Y(y)\cos\frac{m\pi x}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

(7) 式を (4) 式に代入すれば，

$$Y''''-2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y''+\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4-\lambda^4\right\}Y=0$$

となる. 上式を解くために $Y=e^{r_m y}$ と置けば

$$r_m=\pm\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\pm\lambda^2}$$

となり，$r_m=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\lambda^2}$，$r'_m=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\lambda^2}$ [8] と置けば，

8) $\frac{m\pi}{a}$ と λ との大小に依つて Y は異つて來る. 若し $\frac{m\pi}{a}<\lambda$ ならば $A_{3m}\cosh r'_m y+A'_{4m}\sinh r'_m y$ の代りに $A_{3m}\cos r'_m y+A_{2m}\sin r'_m$ となり，從つて後の式は全部異つてくる. 故に Y の式としては，

$$Y=A_{1m}\cosh r_m y+A_{2m}\sinh r_m y+A_{3m}\cosh r'_m y+A_{4m}\sinh r'_m y$$

となる．上式中偶函數のみを採れば，

$$Y=A_m\cosh r_m y+A_{3m}\cosh r'_m y$$

となり，$y=\pm a/2$ にて $W=0$ の條件を滿足する樣に積分常數を決定し，少し變形すると

$$W_1=\sum_{m=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty} A_m \frac{\cosh\frac{r'_m a}{2}\cosh r_m y-\cosh\frac{r_m a}{2}\cosh r'_m y}{\cosh\frac{r_m a}{2}\cosh\frac{r'_m a}{2}}\cos\frac{m\pi x}{a} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

となる．

全く同樣にして

$$W_2=\sum_{m=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty} A_m \frac{\cosh\frac{r'_m a}{2}\cosh r_m x-\cosh\frac{r_m a}{2}\cosh r'_m x}{\cosh\frac{r_m a}{2}\cosh\frac{r'_m a}{2}}\cos\frac{m\pi y}{a} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$[9]

が得られる．從つて $W=W_1+W_2$ は微分方程式を滿足し，周邊にて撓みが零の條件を滿足する函數となる．

次に (8), (9) 式の y に關する第一次偏微係數を求めると次の如くなる．

$$\left.\frac{\partial W_1}{\partial y}\right|_{y=\frac{a}{2}}=\sum_{m=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty} A_m\left\{r_m\tanh\frac{r'_m a}{2}-r'_m\tanh\frac{r_m a}{2}\right\}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$\left.\frac{\partial W_2}{\partial y}\right|_{y=\frac{a}{2}}=-\sum_{m=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty} A_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\cosh\frac{r'_m a}{2}\cosh r_m x-\cosh\frac{r_m a}{2}\cosh r'_m x}{\cosh\frac{r_m a}{2}\cosh\frac{r'_m a}{2}}$$

從つて殘る境界條件として

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}+\frac{\partial W_2}{\partial y}\right)_{y=\pm\frac{a}{2}}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$[10]

を滿足せしめるとよい．このために餘弦級數

$$\cosh\alpha x-\cosh\frac{\alpha l}{2}=-\frac{4\alpha^2 l^2\cosh\frac{\alpha l}{2}}{\pi}\sum_{i=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i(i^2\pi^2+\alpha^2 l^2)}\cos\frac{i\pi x}{l}$$

なる關係を用ひると，條件式 (10) 式は次の如くなる．

$\frac{m\pi}{a}>\lambda$ の場合と $\frac{m\pi}{a}<\lambda$ の場合の式とを組合せたものを必要とするが，ここでは便宜上 Y の式としては只曲線函數のみを用いることとする．從つて (13) 式にて $k=1$ の場合は $\sqrt{k^2-s^2}\tanh\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2-s^2}$ は $-\sqrt{k^2-s^2}\tan\frac{\pi}{2}\sqrt{s^2-k^2}$ として計算する．

9) 正方形版であるから，W_2 の場合にも積分常數は A^m と置いてよい．

10) $x=\pm\frac{a}{2}$ で撓角$=0$ の條件を求めても，(11) 式の x と y を交換した式が得られるから，結果は同一で

$$\sum_{m=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty} A_m\left\{r_m\tanh\frac{r_m a}{2}-r'_m\tanh\frac{r'_m a}{2}\right\}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$-\sum_{m=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty} A_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot 4\sum_{i=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty} i\pi\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{a^2}\left\{\frac{1}{\frac{i^2\pi^2}{a^2}+r_m^2}-\frac{1}{\frac{i^2\pi^2}{a^2}+r_m'^2}\right\}\cos\frac{i\pi x}{a}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(11)}$$

この關係が恒等的に成立するためには，(12) 式に於ける任意の項 $\cos\frac{k\pi x}{a}$ $(k=1,3,5,\cdots\cdots)$ の係數が 0 であることを要する．

$$\sum_{k=1,3,5\cdots\cdots}^{\infty}\left[(-1)^{\frac{k-1}{2}}A_k\left\{r_k\tanh\frac{r_k a}{2}-r'_k\tanh\frac{r'_k a}{2}\right\}\right.$$

$$\left.-4\frac{k\pi}{a^2}\sum_{m=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty}A_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left\{\frac{r_m'^2-r_m^2}{\left(\frac{k^2\pi^2}{a^2}+r_m^2\right)\left(\frac{R^2\pi^2}{a^2}+r_m'^2\right)}\right\}\right]\cos\frac{k\pi x}{a}=0 \quad \cdots\cdots(12)$$

今　$\lambda^2=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\cdot s^2$　とすれば，

$$\frac{r_k a}{2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2+s^2},\quad \frac{r'_k a}{2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2-s^2},\quad \frac{r_m'^2-r_m^2}{\left(\frac{k^2\pi^2}{a^2}+r_m^2\right)\left(\frac{k^2\pi^2}{a^2}+r_m'^2\right)}=\frac{-2s^2}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\{(k^2+m^2)^2-s^4\}}$$

となるから，これ等の値を (12) 式に代入して，

$$(-1)^{\frac{k-1}{2}}A_k\left\{\sqrt{k^2+s^2}\tanh\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2-s^2}-\sqrt{k^2-s^2}\tanh\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2-s^2}\right\}$$

$$+\frac{8ks^2}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\cdots\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{m-1}{2}}A_m\frac{m}{(k^2+m^2)^2-s^4}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(13)}$$

を得る．(13) 式は境界條件を凡て滿足するために (8), (9) 式の積分常數間に存在すべき關係式である．

(13) 式に於て $k=1$, $m=1,3,5,\cdots\cdots$ と置けば次の如き形に表される．

$$C_{11}A_{11}+C_{13}A_{13}+C_{15}A_{15}+C_{17}A_{17}+\cdots\cdots\quad=0$$

玆に C, A の第一添字は $k=1$ の場合なることを表す．

同樣に $k=3,5,7\cdots\cdots$ と置けば次の通り表される．

$$C_{31}A_{31}+C_{33}A_{33}+C_{35}A_{35}+C_{37}A_{37}+\cdots\cdots\quad=0$$

$$C_{51}A_{51}+C_{53}A_{53}+C_{55}A_{55}+C_{57}A_{57}+\cdots\cdots\quad=0$$

$$\vdots$$

一般に　$\sum C_{km}A_{km}=0$　となる．

從つて振動數を計算すべき振動數方程式は，次の (14) 式として與えられる．

$$\Delta=\begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{15}\cdots\cdots \\ C_{31} & C_{33} & C_{35}\cdots\cdots \\ C_{51} & C_{53} & C_{55}\cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(14)}$$

a, h が與へられてゐる時，行列式中の唯一の變數は振動數 p，從つて s である．故に $\varDelta=0$ の最小根は基本振動形の振動數を與へることとなる．

このために $\varDelta$ の左上隅より始めて行列を 1,2……N 迄取り，$\varDelta_1=C_{11}$，$\varDelta_2=\begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix}$，…
…の如く $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3$……をつくる．若し $\varDelta_N=0$ の最小根が N の増加につれて，有限極限に收斂することが判ると，この根は求むる振動數を與へる．

$\varDelta_N=0$ の根は s^2 に適當なる値を假定して試索的に求めるとよい．友近博士の計算に依り，s^2 の値は 3.6462 と判つてゐるから，この前後の値即ち內挿法の計算に便ならしめるため 3.6450, 3.6455, 3.6460, 3.6465, 3.6470 として $\varDelta$ の値を計算してみた．例へば $s^2=3.6460$ に對して $\varDelta$ を書けば表-1[11] の如くなる．s^2 に上の各値を與えて $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3, \varDelta_4, \varDelta_5, \varDelta_6$ の値を計算した結果を表-2 に示してある．

表-2 に記載してないが，$\varDelta_1=0$ の根は 3.60 と 3.61 の間にあつて 3.6044，$\varDelta_2=0$ の根は 3.64 と 3.645 との間にあつて 3.6445 である．$\varDelta_3, \varDelta_4, \varDelta_5, \varDelta_6=0$ の根はいづれも 4 個の函數値に依る Lagrange の內挿式により求めたもので，表-2 の最下段に示してある．

表-1　$s^2=3.6460$ に對する $\varDelta_6$

$m=$	1	3	5	7	9	11	k
$\varDelta_6=$	0.070681	−0.321236	0.070051	−0.026133	0.012450	−0.006863	1
	0.321236	−1.514310	0.121873	−0.058180	0.031009	−0.018138	3
	0.070051	−0.121873	0.824493	−0.568669	0.037226	−0.023949	5
	0.026133	−0.058180	0.059499	−0.568669	0.035036	−0.024736	7
	0.012450	−0.031099	0.037226	−0.035036	0.433856	−0.022519	9
	0.006863	−0.018138	0.023949	−0.024736	0.022519	−0.350703	11

表-2

s^2 ＼ $\varDelta$	$10\cdot\varDelta_1$	$10^2\cdot\varDelta_2$	$10^3\cdot\varDelta_3$	$10^4\cdot\varDelta_4$	$10^5\cdot\varDelta_5$	$10^6\cdot\varDelta_6$
3.6450	0.6902	−0.137	1.83			
3.6455	0.6984	−0.259	0.85	−6.23	−24.77	96.45
3.6460	0.7068	−0.384	−0.17	−0.48	−2.98	10.82
3.6465	0.7150	−0.507	−0.17	5.12	21.25	−80.63
3.6470	0.7235	−0.633	−1.17	10.92	46.19	−160.36
$\varDelta=0$ の根 s^2			−3.64590	3.64605	3.64606	3’64606

$\varDelta_1=0$ の根は 3.6044，$\varDelta_2=0$ の根は 3.6445，$\varDelta_3=0$ の根は 3.64590 で $\varDelta_4=0$，$\varDelta_5=0$，$\varDelta_6=0$ の根はいづれも小數點以下 4 桁目迄は等しく，$\varDelta_5=0$，$\varDelta_6=0$ の根は 3.64606 となつて等しい．即ち速かに收斂してゐることを知る．從つて $\varDelta=0$ の根として $s_1^2=3.64606\fallingdotseq3.6461$ をとる．故

11)　表より判る通り，c の値は符號を除き，△の對角線に關して對稱である．此の性質を利用すれば △の表は速かに書き得る．

に四邊を固定された正方形版の基本振動形の 2π 秒に於ける振動數 p は，$s^4=(3.6461)^2=13.2940$ であるから，$s^4=\dfrac{\rho h a^4 p^2}{D\cdot\pi^4}=13.2940$ となる．この値は友近博士が Weinstein の方法にて求めた値と同一である．

素堀坑の强さに關する彈性學的考察（下）

正員　岡　本　舜　三

A study of the strers distribution arornd a tunnel uithont lining, from the view of the thesry of elasticity (2)

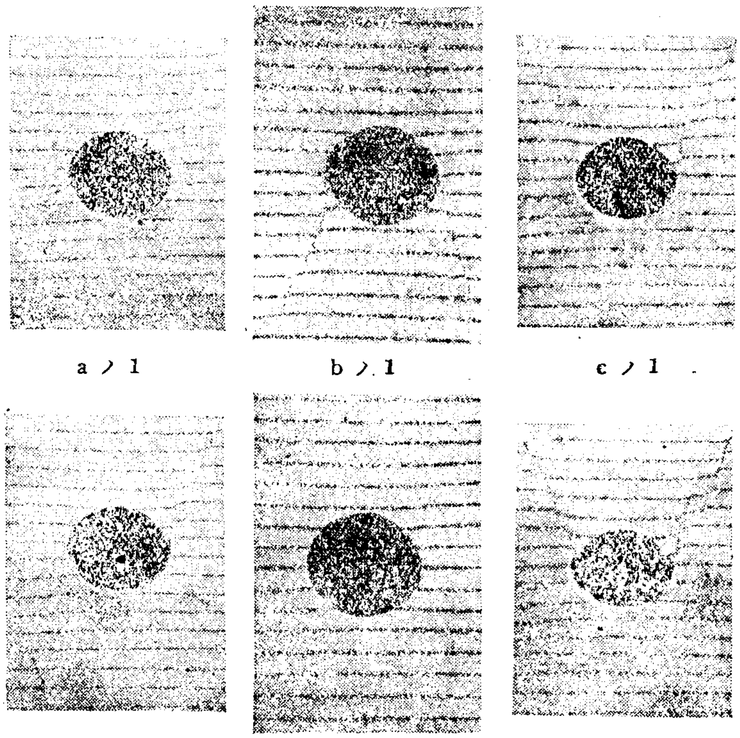
By Sinzo-Okamoto, C. E., Member

第3章　龜裂の進行方向に關する考察

第1節　圓形の孔ある寒天土供試體の龜裂

(I) 壓縮試驗

龜裂の出來る方向を檢討するために圓形の孔をもつ寒天土供試體の壓縮試驗を行う．幅 11.5 cm，高 16.5cm，厚 4.0cm の角墻形試體の中央に直徑 5.3cm の圓形の孔をうちぬき，これを高さの方向に壓縮する，寒天土はこれまでに用いたものと同じである，供試體の側方は開放され裏と表は鋼板と硝子板で固定されている．寒天土の表面には 1.0 cm 間隔の平行線をひき變位を見易くしてある，圖-9 は發生せる龜裂であつて同じ條件で 3 回 (a) (b) (c) 繰返した寫眞である．(1) は龜裂が最初に認められたときを示し，(2) は更に壓縮を繼續するとき，新らたなる龜裂が供試體の外側から出來て，圓孔にまで達する狀況を示すもの



a ノ 1　　b ノ 1　　c ノ 1

a ノ 2　　b ノ 2　　c ノ 2

圖-9