

を固定すれば前の構造物と全く同様に解ける。

従つて此の場合の B, B' に於ける不均モーメントを α_0 とすれば前と同様の様な一定値を生じ B に於ける不均モーメントの総和は $\frac{\alpha_0}{1-\theta}$ で與へられる。かやうにして順次複雑な構造物が解けるのも本法の一特色である。

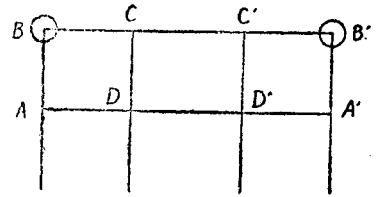


圖 — 7

結 言

以上簡單乍ら格點子法を例解したのであるが本法の使用上の利點は次の如きものと思はれる。

1. 他の方法を用ふるより未知量を少くし得ること。
2. 格點子の式は規則的であり暗記の要なきこと。
3. 特に連続梁に於ては三連モーメントの式を用ふるより遙かに勞少なきこと。
4. 逐次的解法を厭はなければ正解が得らること。

本法の缺點とも云ふべきものは

1. 格點に移動ある場合は他法と同様多少錯雜することを免れないこと。
2. 格點子の式は機械的繰返試法に依り解くには收斂性が撓角法に比し劣ること。

等であらう。

即ち本法は格點の移動なき連続梁、對稱構造物に對稱荷重が作用する場合若くは對稱構造物に逆對稱荷重のみが作用する場合に有効であり、特に其の特色を發揮するものである。

吊橋索條の固有振動に就て

正 員 森 口 繁 一*

On the Natural Oscillation of Suspension Cables

By Sigeiti-Moriguti, C. E., Member

要 旨 吊橋の固有振動の中、主索が自己の平面内で振動するものに就て計算する。そのさい風壓などの影響は考えない。また補剛桁の復原性への寄與を無視し、且つ通常許し得る程度の近似を用ひて、基本方程式 (5) を導く。これをノーマル函數について方程式 (8) になおす。垂比の小さいことを利用して攝動の方法を用ひ、第一近似を求める。荷重などの分布が一様で、且つ對稱性をもっている場合をやくわしくしらべて見る。結論として最も注目すべきは最低次の振動は通常逆對稱曲げ型に關することである。その速さは垂距 D だけから定まる (31 式)。對稱型の振動は、主索の張力、剛性、及び垂比を含む一つのパラメタ α に關係する。(對稱型の最低次の振動の速さを求めるための係數 β_1 を α に對して置點したグラフを添える。) なお振動の實測にさいして振動計をどこに置くべきかという問題に觸れる。最後に補剛桁曲げ剛性の影響を Rayleigh の方法によつて計算する。

* 東京大學助教 工學士

目 次

1. 問題の限定	8. ノーマル函数	15. 等価線密度
2. 記 號	9. 撓動の方法	16. 張力の水平成分
2. 主索の弾性エネルギー	10. 例	17. タコマ橋
4. 運動のエネルギー	11. 逆對稱な型の振動	18. 振動實測上の注意
5. 基本方程式	12. 對稱な型の振動	19. 補剛桁の影響
6. 補 剛 桁	13. 最低次の振動	20. 將來の問題
7. 簡 單 化	14. 對稱型最低次振動の節點	む す び

1. 問題の限定 吊橋の固有振動は、橋床の各断面がそれぞれ上下に振動する型と、回轉振動をする型と、水平に振動する型と、合計三つの類型に分けられる。前の二つに於いては主索は自己の平面内で振動する。こゝでは専らこのような場合を取扱う。そのさい、なるべく一般性を持つ基本方程式を導く。特に索の伸縮の影響を正しく取入れることを志す。

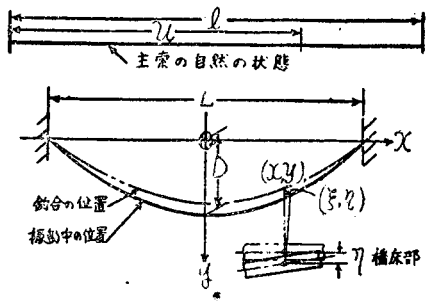


圖-1 記 號

2. 記 號 主索の自由長を l とする。自由な状態に於いて一端からの距離 u なりし點が、釣合の状態に於いて坐標 (x, y) を。振動中には坐標 $(x+\xi, y+\eta)$ を有するものとし、變位成分 ξ, η 及びその微分數は微小であると考える。

3. 主索の弾性エネルギー $U_2(\xi, \eta)$ を、變位 ξ, η の汎函数と見たとき、零次の項は問題とならず、一次の項は釣合の條件によつて靜荷重のポテンシャルエネルギーと相殺する。そして三次以上の項の影響は微小であるから省くことにする。結局振動に對しては二次の項だけを考えればよい。それは次の形に書ける。

$$U_2(\xi, \eta) = \int_0^l \frac{EA}{2} \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right)^2 du + \int_0^l \frac{S}{2} \frac{du}{ds} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right)^2 \right] du. \quad \dots\dots (1)$$

こゝに E はヤング係數、 A は斷面積、 S は釣合の状態に於ける張力、 s は釣合の状態に於いて一端から索に沿つてはかつた長さを表わす。従つて $ds/du = 1 + S/(EA)$ なる關係がある。

4. 運動のエネルギー $T(\xi, \eta)$ は次の形に書けるものとする：

$$T(\xi, \eta) = \int_0^l \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \bar{\mu} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right] du. \quad \dots\dots (2)$$

こゝに μ 及び $\bar{\mu}$ は μ の函数として與えられたものである。 μ は主索の線密度と、主索と共に x 方向に動く部分の等價線密度との和。 $\bar{\mu}$ も同様な意味を持つ。(なお 16 節を見よ)。

5. 基本方程式 復原性が主索だけによる。即ち主索の弾性と張力とだけによつて與えられる

ものとなれば、(1) と (2) とから次の基本方程式が導かれる：

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left[EA \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \frac{dx}{ds} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial u} \left[S \frac{du}{ds} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial u} - \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \frac{dx}{ds} \right\} \right] = \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial}{\partial u} \left[EA \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \frac{dy}{ds} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial u} \left[S \frac{du}{ds} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial u} - \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \frac{dy}{ds} \right\} \right] = \bar{\mu} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

この式に於いて、 $\xi(u, t)$ と $\eta(u, t)$ とが未知函数、他は u の既知函数である。それ故これは ξ, η に関する二階線型連立偏微分方程式である。

境界条件は四つ： $\xi(0, t) = \eta(0, t) = \xi(l, t) = \eta(l, t) = 0$ である。

6. 補剛桁 の復原性への寄與を考慮するには、その弾性エネルギーとして

$$U' = \int \frac{EI}{2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 dx \dots\dots\dots (4)$$

の形の項を追加すればよい。これによつて (3) の左邊には η の四階微分係数を含む項が現われる。それに對應して η に對する境界条件が追加せられるわけである。以下に於いては簡単のため、先ず補剛桁の寄與を無視した計算をする。そして後にその寄與を見積る近似式をも求めようと思う。

7. 簡單化 釣合状態に於ける主索の伸び $S/(EA)$ は通常 10^{-3} の程度を超えない。これを 1 に比べて無視することにする。従つて ds/du は 1 に等しいと考える。なお點を標識する變數として u の代りに s を使うことにする。そうすれば (3) は次のようになる：

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left[EA \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \eta}{\partial s} \right) \frac{dx}{ds} + S \frac{\partial \xi}{\partial s} \right] = \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial}{\partial s} \left[EA \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial \eta}{\partial s} \right) \frac{dy}{ds} + S \frac{\partial \eta}{\partial s} \right] = \bar{\mu} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

この式は力の釣合の考えから直接に導くことも出来る。そのさい索の伸縮を考慮に入れることに注意を要する。また張力 S の代りにその水平成分 $H = S(dx/ds)$ を用い、獨立變數として s の代りに x を用いてこれを書きなおすこともできる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{ds}{dx} \right)^{-1} + H \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] = \mu_x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{ds}{dx} \right)^{-1} + \frac{dy}{dx} + H \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = \bar{\mu}_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

こゝに索の單位長さについての質量 $\mu, \bar{\mu}$ の代りに、單位の水平距離についての質量 $\mu_x, \bar{\mu}_x$ を使つてある。 $(\mu_x = \mu ps/dx)$ 。さらに張力の水平成分が、振動中に H から増している高はちようと (6) の第一式の左邊の [] 中の式に等しいから、これを用いて書きなおすこともできるが、その式を記すことは省略する。

8. ノーマル函数 を $X(x), Y(x)$ とし,

$$\xi = X(x) \cos \omega t, \quad \eta = Y(x) \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (7)$$

と置いて (6) に代入すると,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[EA \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dY}{dx} \right) \left(\frac{ds}{dx} \right)^{-3} + H \frac{dX}{dx} \right] &= -\bar{\mu}_x \omega^2 X, \\ \frac{d}{dx} \left[EA \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dY}{dx} \right) \left(\frac{ds}{dx} \right)^{-3} \frac{dy}{dx} + H \frac{dY}{dx} \right] &= -\bar{\mu}_x \omega^2 Y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

が得られる。これは ω をパラメタとする、 X 及び Y に關する連立線型常微分方程式である。境界條件は、兩端で $X=Y=0$ なることである。

この境界値問題は、一般には數値解法によつて解ける。そのさい兩式の左邊の [] 中を補助の未知函数とすれば便利であろう。

9. 攝動の方法 主索の垂距(sag) D と徑間(span) L との比——垂比(sag ratio)—— $\varepsilon=D/L$ は通常 $1/8$ ないし $1/12$ の程度である。これをパラメタとして、攝動の方法を用いてみる。 $dy/dx=O(\varepsilon)$, $ds/dx=1+O(\varepsilon^2)$ である。吟味の結果、第一近似として、 $\omega^2=O(\varepsilon)$, $X=O(\varepsilon \cdot Y)$ なる解が得られることがわかる。それは

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[EA \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dY}{dx} \right) \right] &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left[EA \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dY}{dx} \right) \frac{dy}{dx} + H \frac{dY}{dx} \right] &= -\bar{\mu}_x \omega^2 Y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

を解いて得られるものである。第一の方程式を積分して、

$$\left. \begin{aligned} EA \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dY}{dx} \right) &= C \text{ (常數)}, \\ \frac{d}{dx} \left(H \frac{dY}{dx} \right) + \bar{\mu}_x \omega^2 Y &= -C \frac{d^2 y}{dx^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

としてもよい。境界條件は兩端で $X=Y=0$ なることである。

こゝまでの式は EA や H や $\bar{\mu}_x$ が常數でなくとも成立つ。

10. 例 として次ぎの場合を扱つてみよう： $EA=$ 一定、 $H=$ 一定、 $\bar{\mu}_x=$ 一定、 $y=D(1-4x^2/L^2)$ 、兩端は $x=\pm L/2$, $y=0$ 。

この場合、方程式 (10) は

$$\frac{dX}{dx} - \frac{8D}{L^2} x \frac{dY}{dx} = \frac{C}{EA} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{\bar{\mu}_x \omega^2}{H} Y = \frac{C}{H} \frac{8D}{L^2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。

$$\beta = \sqrt{\frac{\bar{\mu}_x}{H}} \omega \frac{L}{2}, \quad \omega = \frac{2\beta}{L} \sqrt{\frac{H}{\bar{\mu}_x}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

なる無名數を用いることにすると、(11),(12) の一般解は次ぎのように書ける：

$$X = \frac{8D}{L^2} \left[C_1 \left\{ x \cos\left(\frac{2\beta}{L}x\right) - \frac{L}{2\beta} \sin\left(\frac{2\beta}{L}x\right) \right\} + C_2 \left\{ x \sin\left(\frac{2\beta}{L}x\right) + \frac{L}{2\beta} \cos\left(\frac{2\beta}{L}x\right) \right\} \right] + \frac{C}{EA}x + C', \dots\dots (14)$$

$$Y = C_1 \cos\left(\frac{2\beta}{L}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{2\beta}{L}x\right) + C \frac{1}{\beta^2} \frac{2D}{H}. \dots\dots (15)$$

境界条件を入れると

$$\left. \begin{aligned} C_1(\beta \cos\beta - \sin\beta) \pm C_2(\beta \sin\beta + \cos\beta) + C \frac{L^3}{8D} \frac{1}{EA} \beta \pm C' \frac{L}{4D} \beta &= 0, \\ C_1 \cos\beta \pm C_2 \sin\beta + C \frac{1}{\beta^2} \frac{2D}{H} &= 0, \quad (\text{複號同順}). \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

これより二系列の解が得られる:

1) $\sin\beta = 0$; $C' = -\frac{4D}{L} \frac{\cos\beta}{\beta} C_2$, $C_1 = C = 0$ (17)

2) $\frac{\beta - \tan\beta}{\beta^3} = \frac{1}{16} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left(\frac{H}{EA}\right) \equiv \alpha$ と置く; $C = -\frac{H}{2D} \beta^2 \cos\beta \cdot C_1$, $C_2 = C' = 0$. (18)

前者は逆対称 後者は対称な型である.

11. 逆対称な型 の振動の速さは $\sin\beta = 0$ の根から定まる. 即ち $\beta = m\pi$, ($m=1, 2, \dots$) に對應して

$$\omega = \frac{2m\pi}{L} \sqrt{\frac{H}{\mu_x}}, \quad (m=1, 2) \dots\dots (19)$$

で與えられる. (振動数は $(\omega/2\pi)$. 振動のモードを表わす式は次の通り:

$$X = C_2 \frac{4D}{m\pi L} \left(\frac{2m\pi x}{L} \sin \frac{2m\pi x}{L} + \cos \frac{2m\pi x}{L} - \cos m\pi \right). \dots\dots (20)$$

$$Y = C_2 \sin \frac{2m\pi x}{L}. \dots\dots (21)$$

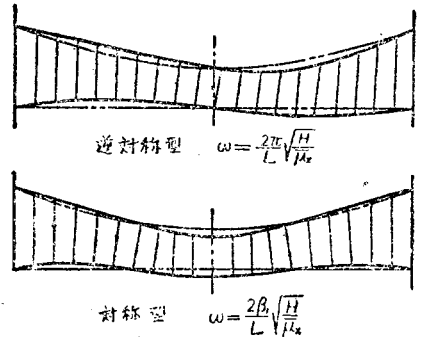


圖-2 振動の形

最低次のもの ($m=1$) では, 中央に一つだけ節點がある.

12. 対称な型 の振動の速さは

$$\frac{\beta - \tan\beta}{\beta^3} = \alpha \equiv \frac{1}{16} \left(\frac{L}{D}\right) \left(\frac{H}{EA}\right) \dots\dots (22)$$

の根から定まる. その正根を, 小さい方から順次に β_1, β_2, \dots と名づけると,

$$\omega = \frac{2\beta_m}{L} \sqrt{\frac{H}{\mu_x}}, \quad (m=1, 2, \dots) \dots\dots (23)$$

が速さを與える. 振動のモードを表わす式は次の通り:

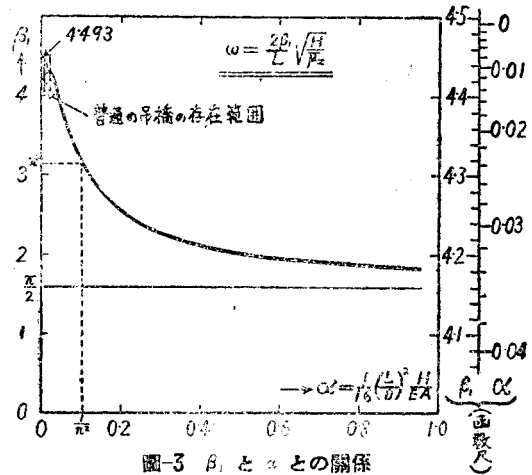
$$X = C_1 \frac{4D}{\beta_m L} \left(\frac{2\beta_m x}{L} \cos \frac{2\beta_m x}{L} - \sin \frac{2\beta_m x}{L} - \alpha \beta_m^3 \cos \beta_m \cdot \frac{2\beta_m x}{L} \right) \dots\dots\dots (24)$$

$$Y = C_1 \left(\cos \frac{2\beta_m x}{L} - \cos \beta_m \right) \dots\dots\dots (25)$$

節點の位置はあとで 14 節で吟味する。

13. 最低次の振動. 逆對稱型の最低次の振動は, 中央に節點があるので, 一見「第二次振動」のようである. 實際不用意にそのように呼ばれることがある (例えば ENR 1940 年 11 月 21 日號 40 頁, Kármán の論文に對する編集者のノート). けれどもこの呼び方は果して正しいであろうか, それを吟味するために對稱な型の最低次の振動の速さと, 逆對稱な型の最低次の振動の速さとを比べてみよう.

(22) の最小正根 β_1 が α と共にどのように變ずるかをしらべると, 大體第 3 圖の通りである. α が 0 のとき $\beta_1 = 4.493$ で, α が増加するにつれて β_1 は單調に減少し, $\alpha = 1/\pi^2$ に至つて $\beta_1 = \pi$ となる. α がさらに大となれば β_1 はさらに減少し, $\alpha \rightarrow \infty$ の極限に於いて $\beta_1 = \pi/2$ となる. さて (19) と (23) とを比べてすぐわかるように, β_1 が π より大きいときは對稱型の最低次の振動数は逆對稱型の最低次の振動数よりも高い. しかるに實際の吊橋の設計に於いては, パラメタ α (22) 式) の値は 0.01 の程度であり, 特に大きいものでも 0.02 を越えることはまれである. (第 3 圖の斜線部). それ故最低次の振動は逆對稱型に屬するという通則が成立する. かくて, 中央に一つの節點のある, 逆對稱型の最低次の振動を「第二次振動」と呼ぶのは誤である. ついでながら, ピアノやヴァイオリンのような弦樂器の弦を吊橋の仲間と見るならば, それは垂比がきわめて小さく且應力の高い場合にあたり, 上記のパラメタ α が甚だ大なる極限と解される. それ故, このようなものでは上の通則とは反對に, 最低次の振動が對稱型に屬し, 従つて逆對稱型の最低次のものを第二次振動と呼ぶのは正しいのである.



14. 對稱型最低次振動の節點 の位置を吟味しておこう. (25) 式からわかるように, $\beta_1 < \pi$ のときは兩端のほか節點がない. $\beta_1 > \pi$ のときは $x = \pm(2\pi/\beta_1 - 1)L/2$ の所, すなわち徑間の中央からの距離が徑間 L の $(\pi/\beta_1 - 1/2)$ 倍に等しい位置に一對の節點がある. パラメタ α が 0 ならばこの距離は L の約 20%, α が 0.02 ならば約 22% である.

15. 等價線密度 $\bar{\mu}_x$ の計算法. 橋の單位長さ当たりの重量 w を次ぎのように分類する:

- 1) 索及び補剛桁の重量, 片側について w_1 ,
- 2) 橋床重量 (横桁及び對風構を含む) w_2 .

即ち $w = 2w_1 + w_2$ である.

橋の断面が上下に振動する型(曲げ型)に対しては

$$\bar{\mu}_x = \frac{w}{2g} = \frac{1}{g} \left(w_1 + \frac{1}{2} w_2 \right) \dots\dots\dots (26)$$

とすればよい。また断面が回轉振動をする型(捩り型)に対しては、橋床の質量分布を一樣と假定して、

$$\bar{\mu}_x = \frac{1}{g} \left(w_1 + \frac{1}{6} w_2 \right) \dots\dots\dots (27)$$

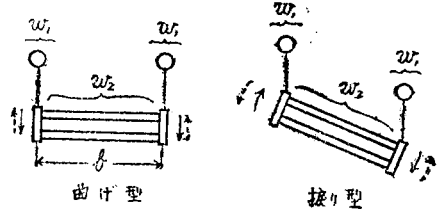


圖-4 橋の横断面

としてよいであろう。そのさい索及び補剛桁を含めての質量慣性モーメント(單位長さ当たり) j がわかっているならば、もちろん

$$\bar{\mu}_x = \frac{j}{2} / \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{2j}{b^2} \dots\dots\dots (28)$$

とすべきである。こゝに b は橋の幅(主索の間隔)を表わす。

上の計算で、單位をすべて統一することに注意しなければならぬ。即ち例えば kg-m-s 系を用いるとすれば、 w, w_1, w_2 は [kg/m], $\bar{\mu}_x$ は [kgm⁻²s²], j は [kgs²], b は [m] を單位とし、 g は 9.8[m/s²] として計算すべきである。

なお、全徑間にわたる總重量 W 及び總質量慣性モーメント Θ の値が與えられているならば、(26) 及び (28) の代りに

$$\bar{\mu}_x = \frac{W}{2gL} \quad (\text{曲げ型}) \dots\dots\dots (29)$$

$$\bar{\mu}_x = \frac{2\Theta}{b^2L} \quad (\text{捩り型}) \dots\dots\dots (30)$$

なる式を、それぞれ使えばよい。

16. 張力の水平成分 H は、單位長さ当たりの重量 w を死荷重として計算すれば $wL^2/(16D)$ となる。これと (26) とを (19) に入れると、逆對稱曲げ型最低次振動の速さは

$$\omega = 2\pi \sqrt{\frac{g}{8D}} \dots\dots\dots (31)$$

となる。これが垂距 D だけから定まり、その他の諸元に関係しないことは面白いことである。

17. Tacoma 橋 の數値による計算例

諸元*: 徑間 $L=853\text{m}$, 垂距 $D=70.8\text{m}$, 索の重量 940kg/m 片側の補剛桁の重量 480kg/m , 橋床重量 $w_2=6400\text{kg/m}$, 索の直径 $d=43.2\text{cm}$.

計算: 片側の索と補剛桁との重量合計 $w_1=940+480=1420\text{kg/m}$, 單位長さ当たりの死荷重 $w=2w_1+w_2=9240\text{kg/m}$. 張力の水平成分 $H=wL^2/(16D)=5.93 \times 10^6\text{kg}$. 等價線密度. 曲げ型に對し $\bar{\mu}_x=w/(2g)=471\text{kgm}^{-2}\text{s}^2$, 捩り型に對し $\bar{\mu}_x=(w_1+w_2/6)/g=254\text{kgm}^{-2}\text{s}^2$. ヤング係數 $E=1.9 \times 10^6\text{kg/cm}^2$ とする. 斷面積 $A=\frac{\pi}{4}d^2=1466\text{cm}^2$, パラメタ $\alpha=(L/D)^2(H/EA)/16=12.05^2 \times 0.00213/16=0.0194$, 係數 $\beta_1=4.36$, (α に對し第3圖から讀み取る).

* ENR (1941/3/27) 61, 土木學會誌 27 (昭 16) 880,

結果:

振動の型	ω [rad/sec]	毎秒振動數	毎分振動數	週期(秒)
逆對稱曲げ型最低次	0.826	0.132	7.9	7.6
逆對稱振り型最低次	1.123	0.179	10.7	5.6
對稱曲げ型最低次	1.148	0.183	11.0	5.5
對稱振り型最低次	1.560	0.248	14.9	4.0

實測結果としては、逆對稱な型について、曲げ型5回毎分、振り型15回毎分なる數値が報告されている²⁾。これをどの程度に信用してよいか疑問であるが、上の計算結果と比べて大きい開きはないと言える。

18. 振動實測上の注意. 逆對稱型の振動は徑間の中央に節點があるから、そこに計器を置いて測つたのでは、この型の振動が把えられないわけである。しかもこの型の振動が最低固有振動數をもつのが常であるから、この點は大いに注意しなければならぬ。最低固有振動數を測定するためには計器は徑間の四分點におくのがよいと思われる。

次に對稱型の最低次の振動を記録するには、何と言つても徑間の中央に計器を置くに如くはない。結局吊橋の振動を實測するには徑間の中央と四分點と二箇所に計器を置くことが望ましい。どうしても一箇所だけで両方を把えたいときは、節點の位置をよく考へて計器の位置を適當に選ぶ注意が肝心である。

なお振動計を橋床の中央に置いたのでは、振り型が記録されないから、これを把えるには端に片寄せて置かねばならないことは勿論である。

19. 補剛桁の影響 を簡單に見積るには、Rayleighの方法に依るのがよい³⁾。

補剛桁の曲げ剛性 EI が HL^2 に比べて甚だ小さいものとすれば、その影響は振動の型には殆ど現われなからう。従つて Rayleighの方法で振動の速さ ω を計算するとき、ノーマル函數 X 及び Y として、補剛桁の剛性を無視したときの形を取つてよい。計算の式は

$$\omega^2 = \left[\int EA \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dY}{dx} \right)^2 dx + \int H \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 dx + \int EI \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx \right] / \int \mu_x Y^2 dx \quad \dots (32)$$

である。積分はすべて橋の徑間全體にわたるものである。

逆對稱型の最低次の振動に對しては、

$$X = C_2 \frac{4D}{\pi L} \left(\frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} + \cos \frac{2\pi x}{L} + 1 \right), \quad Y = C_2 \sin \frac{2\pi x}{L} \quad \dots (33)$$

として、次ぎの結果が得られる。

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{H}{\mu_0} \left(1 + 4\pi^2 \frac{EI}{HL^2} \right), \quad (\text{逆對稱型最低次}). \quad \dots (34)$$

對稱型の最低次の振動に對しては

2) ENR (1940/12/5) 40

3) 土木學會誌 7 (大正 10) の物部氏の論文には多分に疑問がある。索の剛性 EA を含む項に關して特にそうである。

$$X = C_1 \frac{4D}{\beta_1 L} \left(\frac{2\beta_1 x}{L} \cos \frac{2\beta_1 x}{L} - \sin \frac{2\beta_1 x}{L} - \alpha \beta_1^2 \cos \beta_1 \frac{2\beta_1 x}{L} \right), \quad Y = C \left(\cos \frac{2\beta_1 x}{L} - \cos \beta_1 \right) \dots (35)$$

として、次ぎの結果が得られる：

$$\omega^2 = \frac{4\beta_1^2}{L^2} \frac{H}{\mu_x} \left(1 + \frac{4\beta_1^2(2\beta_1 + \sin 2\beta_1)}{2\beta_1 + 4\beta_1 \cos^2 \beta_1 - 3 \sin 2\beta_1} \frac{EI}{HL^2} \right), \quad (\text{對補型最低次}) \dots (36)$$

この場合には補正項の係数は β_1 の函数、従つてまたパラメタ α の函数である。 ($\alpha=0, 0.01, 0.02$ に對し 88.7, 86.0, 80.4)。

EI/HL^2 は通常 $10^{-5} \sim 10^{-2}$ の程度である。 $EI/HL^2=0.001$ なるとき、補剛桁の影響によつて逆對稱型最低次の振動数は 4% 程度對稱型最低次の振動数は 8% 程度高められるわけである。

EI/HL^2 がもつと大きい場合は別に考えねばなるまい。

20. 將來の問題。

- (1) 振動の方程式 (8) を數值的に積分して、第一近似の近似度を検討すること。
- (2) 第二近似を求めること。それによつて垂比 D/L による補正項が與えられる。
- (3) 振動の實測結果との比較。
- (4) 索の伸縮のあるなしが設計上ならびに振動現象の觀察上有する意義。
- (5) 補剛桁の影響に對する一層嚴密な計算。 EI/HL^2 が小さくないときの補正の式。
- (6) 徑間が單一でなく、副徑間がある場合の振動。塔が彈性的であるときはその影響。
- (7) 移動荷重による振動特に減衰の不良に基く特異な現象。
- (8) 吊橋の振動数を計算するための實用的近似公式。

むすび。 有益な助言を賜つた小野鑑正先生、林泰造氏、ならびにいろいろ懇切に御指導下さつた平井敦氏に感謝する。なお橋梁の實地に携わつて居られる方々からの討論をも切望する次第である。