る.

本稿の終りに臨み，御繁用中にも拘らず種々御教示を賜つた恩師東大教授田中豐博士に厚く御禮申上ぐる次第である. —— 完 ——

吊橋補剛桁の上下振動と捩り振動との間に生ずる一聯成現象

准員 林 泰 造*

A coupling Phenomenon that yield between vertical and torsional oscillations in Stiffner of suspension-bridge

By Taizo, Hayashi, Assoc. Member

梗 概 吊橋に對して，水平方向の風力が橋軸に垂直に作用する場合に，補剛桁の上下振動と中心軸の廻りの捩り振動とを聯成現象として取扱ひ，此の聯成振動の安定性及び安定性の限界に就て論じたものである．其の得られた結果は捩れ挫屈の條件に他ならない．

目 次

1. 基本式の考察

吊橋に對して，水平方向の風力が橋軸に垂直に作用する場合の補剛桁の捩り振動に關しては，既に東大平井助教授の御研究[1]がある．假定及び記號は總て同氏のものを使用する．

捩り振動の基本式は前記文獻によれば，

$$\frac{\Theta}{l}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\left(KG+\frac{Hb^2}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+apb^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{M}_x. \qquad \cdots\cdots(1)$$

但し，塔方向に x 軸を，補剛桁の中心軸方向に z 軸を採り，又

φ: 補剛桁の回轉角

t: 時 間

Θ: 補剛桁の中心軸廻りの慣性モーメント

l: 支 間

K: 補剛桁全斷面の捩り係數

---

* 工學士，東京大學第一工學部研究囑託

1) 平井敦助教授: "吊橋の捩り振動に對する安定性に就て," 土木學會誌第 28 卷 9 號. p. 769.

G: 剛性係數

H: 死荷重に基く索條の張力の水平方向成分

b: 補剛桁の幅員

a: $C_m = a\varphi$ から定められる常數

但し

C_m: 補剛桁の中心軸に關する風力モーメント係數

p: $p=\frac{1}{2}eV^2$

但し

V: 風速,　e: 空氣密度

u: 補剛桁の上方向 (x 方向) への變位量

$\mathfrak{M}_x$: 風壓に基く補剛桁の曲げモーメント

とする.

補剛桁の上下振動の基本式は, 前記文献[1] p. 770 附近を參照する事により,

$$\frac{2m}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2H\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-EI\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varphi\mathfrak{M}_x). \qquad (2)$$

但し,

$2m/g$: 單位長當りの吊橋の質量

EI: 補剛桁の剛性

從つて (1) と (2) とを考察する時, φ と u とは互に相關的となつて居り, 上記捩り振動と上下振動とは聯成振動を行ふ事が判明する.

2. 聯成振動の安定性及び其の限界

w を補剛桁に作用する單位長當りの風壓とすれば, $\mathfrak{M}_x$ は

$$\mathfrak{M}_x=\frac{w}{2}z(l-z) \quad (0\leqq z\leqq l)$$

と表されるのであるが, 數學的取扱ひを簡單にする爲, 今 M_0 を常數とする時,

$$\mathfrak{M}_x=M_0 \quad (0\leqq z\leqq l) \qquad (3)$$

と置き, 之を (1), (2) に代入して近似的に解の安定性及び其の限界を檢する事とする. (3) を (1), (2) に代入すれば (1), (2) は夫々次の如くとなる:

$$\begin{cases} \dfrac{\Theta}{l}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\left(KG+\dfrac{Hb^2}{2}\right)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+apb^2\varphi+M_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, & (4)\\ \dfrac{m}{g}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=H\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\dfrac{EI}{2}\dfrac{\partial^4 u}{\partial z^4}+\dfrac{M_0}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. & (5)\end{cases}$$

(4), (5) に於て,

$$\varphi=\phi e(z)^{i\omega t}, \qquad (6)$$

$$u = U(z)e^{i\omega t} \quad \cdots\cdots (7)$$

と置けば，(4), (5) は夫々次の如くなる：

$$\begin{cases} \left(KG + \dfrac{Hb^2}{2}\right)\dfrac{d^2\phi}{dz^2} + \left(apb^2 + \dfrac{\Theta}{l}\omega^2\right)\phi + M_0\dfrac{d^2U}{dz^2} = 0, & \cdots\cdots (8) \\ \dfrac{M_0}{2}\dfrac{d^2\phi}{dz^2} - \dfrac{EI}{2}\dfrac{d^4U}{dz^4} + H\dfrac{d^2U}{dz^2} + \dfrac{m}{g}\omega^2U = 0. & \cdots\cdots (9) \end{cases}$$

更に

$$\phi(z) = A\sin\frac{s\pi}{l}z \equiv A\sin\lambda_s z, \quad (0 \leqq z \leqq l) \quad \cdots\cdots (10)$$

$$U(z) = B\sin\frac{s\pi}{l}z \equiv B\sin\lambda_s z, \quad (0 \leqq z \leqq l) \quad \cdots\cdots (11)$$

と假定すれば，(8), (9) は夫々

$$\begin{cases} A\left\{-\lambda_s^2\left(KG + \dfrac{Hb^2}{2}\right) + \left(apb^2 + \dfrac{\Theta}{l}\omega^2\right)\right\} - B\lambda_s^2M_0 = 0, & \cdots\cdots (12) \\ -A\dfrac{M_0}{2}\lambda_s^2 + B\left(-\dfrac{EI}{2}\lambda_s^4 - H\lambda_s^2 + \dfrac{m}{g}\omega^2\right) = 0. & \cdots\cdots (13) \end{cases}$$

となる．而して (12), (13) から直ちに判明する樣に，A 及び B が恒等的には 0 に等しくない爲には次の式が成立する事が必要である

$$\begin{vmatrix} -\lambda_s^2\left(KG + \dfrac{Hb^2}{2}\right) + \left(apb^2 + \dfrac{\Theta}{l}\omega^2\right), & -M_0\lambda_s^2 \\ -\dfrac{M_0}{2}\lambda_s^2, & -\dfrac{EI}{2}\lambda_s^4 - H\lambda_s^2 + \dfrac{m}{g}\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots (14)$$

或は，

$$\frac{m\Theta}{gl}\omega^4 - \left[\frac{m}{g}\left\{\lambda_s^2\left(KG + \frac{Hb^2}{2}\right) - apb^2\right\} + \frac{\Theta}{l}\lambda_s^2\left(\frac{EI}{2}\lambda_s^2 + H\right)\right]\omega^2$$
$$+ \lambda_s^2\left\{\lambda_s^2\left(KG + \frac{Hb^2}{2}\right) - apb^2\right\}\left(\frac{EI}{2}\lambda_s^2 + H\right) - \frac{\lambda_s^4}{2}M_0^2 = 0. \quad \cdots\cdots (14')$$

更に，

$$L \equiv m\Theta/gl, \quad \cdots\cdots (15)$$

$$M \equiv \frac{m}{g}\left\{\lambda_s^2\left(KG + \frac{Hb^2}{2}\right) - apb^2\right\} + \frac{\Theta}{l}\lambda_s^2\left(\frac{EI}{2}\lambda_s^2 + H\right), \quad \cdots\cdots (16)$$

$$N \equiv \lambda_s^2\left\{\lambda_s^2\left(KG + \frac{Hb^2}{2}\right) - apb^2\right\}\left(\frac{EI}{2}\lambda_s^2 + H\right) - \frac{\lambda_s^4}{2}M_0^2 \quad \cdots\cdots (17)$$

と置けば (14′) は，

$$L\omega^4 - M\omega^2 + N = 0 \quad \cdots\cdots (18)$$

となり，從つて，

$$\omega^2 = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L} \quad \cdots\cdots (19)$$

となる．斯くして次に此の補剛桁の振動の安定性を吟味して見よう．之の爲には (6) 及び (7) を考察する．即ち (6) 及び (7) に於て：

(i)　若し ω が實數ならば，振動は單弦振動となり，補剛桁の振動は動安定となる．

(ii)　若し ω が複素數ならば，$\omega=\alpha+i\beta$ と置く事が出來る．而る時は　$-\omega=-\alpha-i\beta$　も亦 (18) の根であり，$i\omega$ か $-i\omega$ か何れかゞ正の實部を持つ．從つて振動の振幅は時間と共に增大して行き，振動は動的不安定となる．

以上の事柄から，此の系は ω が實數從つて ω^2 が正の實數なる場合にのみ安定である事が判る．然るに (15) から明かなる如く $L>0$ なる故，(19) から次の如き，各場合に對する系の安定，不安定の表，表-1 を得る．

表-1

	$M>0$	$M<0$
$N>0$	$M^2-4LN\geqq 0$ なら安定……(Ⅰ) $M^2-4LN<0$ で不安定……(Ⅱ)	不安定……(Ⅴ)
$N=0$	安　定……(Ⅲ)	不安定……(Ⅵ)
$N<0$	不安定……(Ⅳ)	不安定……(Ⅶ)

M の大さは (16) によつて與へられるが，(16) 中に含まれる常數 a は，補剛桁斷面が其の重心を過る水平面に關して對稱形なる時は $a<0$ であり，從つて此の場合(16) から當然 $M>0$ となる．補剛桁斷面が其の重心を過る水平面に關して非對稱なる場合の a の値の實測結果は尠いのであるが，上記の場合に準じて矢張り $M>0$ となる事が豫想される．以下 $M>0$ なるものとして論じて行く．從つて表-1 に記載した $M<0$ に對應する3箇の不安定現象 (Ⅴ), (Ⅵ), (Ⅶ) は實在せぬものと推論される．

次に $N>0$ の場合の M^2-4LN の大さに就て吟味を行つて見る．(15), (16), (17) から

$$M^2-4LN=\left[\frac{m}{g}\left\{\lambda_s^2\left(KG+\frac{Hb^2}{2}\right)-apb^2\right\}+\frac{\Theta}{l}\lambda_s^2\left(\frac{EI}{2}\lambda_s^2+H\right)\right\}^2$$

$$-4\frac{m\Theta}{gl}\lambda_s^2\left\{\lambda_s^2\left(KG+\frac{Hb^2}{2}\right)-apb^2\right\}\left(\frac{EI}{2}\lambda_s^2+H\right)+4\frac{m\Theta}{gl}\frac{\lambda_s^4}{2}M_0^2$$

$$=\left[\frac{m}{g}\left\{\lambda_s^2\left(KG+\frac{Hb^2}{2}\right)-apb^2\right\}-\frac{\Theta}{l}\lambda_s^2\left(\frac{EI}{2}\lambda_s^2+H\right)\right]^2+2\frac{m\Theta}{gl}\lambda_s^4M_0^2$$

從つて常に　$M^2-4LN\geqq 0$　である．故に表-1 中の (Ⅱ) の不安定現象も實在しない事を知る．

斯くして表-1 の中で實在するのは，(Ⅰ), (Ⅲ), (Ⅳ) の3箇の各場合のみである．從つて結局，補剛桁の振動は，

$$N\equiv\lambda_s^2\left\{\lambda_s^2\left(KG+\frac{Hb^2}{2}\right)-apb^2\right\}\left(\frac{EI}{2}\lambda_s^2+H\right)-\frac{\lambda_s^4}{2}M_0^2\geqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

なる時，動的安定となると結論する事が出來る．

之は平井助教授の (21) 式に相當する式であつて，唯異る所は補剛桁の剛性 EI の代りに $(EI+2H/\lambda_s^2)$ となつて居る點のみであり，之は同氏が立論の最初に補剛桁の剛性 EI のみを考へら

れた爲である[2]，

(20) 式の M_0 は β を適當な正の數とすれば

$$M_0=\frac{wl^2}{\beta}, \quad \cdots\cdots (21)$$

此の β を如何に決定するかと云ふ事が問題であるが，(21) を (20) に代入して得られる結果を平井助教授の (21) 式と對照すれば，

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{128}} \quad \cdots\cdots (22)$$

と置けば良い事が判明する．

從つて (20) は次の如く書き替へられるが，之は本質的に平井助教授の (22) 式に外ならない．

$$\frac{(keSl^2)^2}{128\left(KG+\frac{b^2}{2}H\right)\left(EI+\frac{2H}{\lambda_s^2}\right)}V^4+\frac{aeb^2}{2\left(KG+\frac{b^2}{2}H\right)}V^2=\frac{4\pi^2}{l^2}. \quad \cdots\cdots (23)$$

但し　　S： 補剛桁の單位長當りの側面有效曝露面積

　　　　k： 常　數

3. 補剛桁の剛性 EI が極めて小なる場合

吊橋によつては，時に死荷重 m 及び索條の水平張力 H が相當大であるにも關らず，補剛桁の剛性 EI が著しく小である樣な種類のものが存在する[3]．斯樣な型の吊橋に對しては，以上述べた處と少しく異つた取扱ひを行はねばならぬ．即ち EI が著しく小なる場合は，一般に單位長當りの補剛桁の中心軸廻りの慣性モーメント Θ/l も亦極めて小なる量であると考へられる．從つて $\Theta/l\to 0$ の場合，(1) から判明する如く，振動の慣性項は 0 となり，結局補剛桁は捩り振動を行はぬ事を知る．また補剛桁の上下振動の基本式は (2) から，

$$\frac{m}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=H\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots (2')$$

となる．之は補剛桁の上下方向の固有振動を表す式であり，補剛桁は上下方向に單に固有振動のみを行ひ，捩り振動は行はず，從つて前節迄記述した聯成現象は，本節表記の場合には存在せぬ事を知る．

---

2) 平井　敦附記　林氏の指摘された點は正しい．實は EI のみを採る可きか，又は例へば $S=2$ の場合，$EI+\frac{l^2}{2\pi^2}H=EJ$ となす可きかに關しては理論的に一應は 2 つの途が考へられ，此の決定を實驗により解決する事とし，之を行つた所，詳細は改めて報告する積りであるが少くとも靜力學的には上記 EJ とすべきであるとの結論を得た．此の點を訂正し，筆者の前記文獻に於る EI は吊橋の換算撓み剛性を意味するものとする．猶平井の第 4 篇を參照されたい．

3) 例へば，米國 George Washington 橋等．

4. 結　　言

以上述べた所により，吊橋の補剛桁に於ける其の中心軸廻りの捩り振動と中心軸の上下振動とは聯成的に取扱はれ得る事を知つた．

小論を纏むるに當つて種々御指導を賜つた東大田中　豊先生，種々御指導及び御激勵を賜つた平井敦助教授に厚く感謝申上ぐる次第であります．

ラ ー メ ン の 解 法

准員　横　山　勝　信*

Solution of Raumen

By Katunobu Yokoyama, Assoc Member

要　旨　ラーメンの解法には種々の試みがなされてゐるが，全部が全部と言つて良い程式を覺えねばならないと云ふ缺點を有して居るが，獨りモーメント分配法は固定梁の端モーメント，格點に於ける分配率，格點より隣接格點への傳達率の觀念さへ念頭に置けば別に面倒な式を覺へずとも如何程でも眞に近い値を求めることが出來る．

しかし之には目の子式運算と云ふ缺點を有し複雜な構造物には不向である．

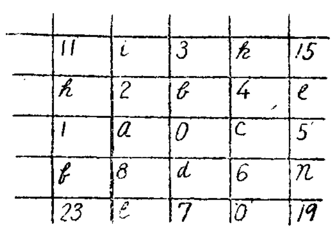
私は以下述べる如き格點子なる量を考へることに依り規則的な式の作法に成功した．

目　　次

1. 一　般　式

一般式を與へる爲に圖-1 の如き格子型ラーメンを考へる．

此の内一つの格點 0 に着目し 0 を含み 0 から一つ置きにとつた格點の組を 0 の組の格點と名付け圖の如く 1,2,3,4,5 等と名付ける．



圖―1

之等に含まれぬ格點の組を a の組の格點と名付け圖の如く a, b, c, d, e 等と名付けるものとする．

モーメント分配法を適用するに當り a, 0 の組の格點を交互に自由にすることにする．即ち例へば 0 の組の格點は全く回轉せしめぬ樣にして a の組の格點を自由に回轉せしめる (以下之を單に a 組の格點を自由にすると云ふ) と云ふ操作と 0 組の格點を自由にする操作を反復するの

* 建設院水政局