

○ 葛城川 水理学の発展

○ 河川工学

# 水文學に於ける非對稱分布に就て

准員 岩 井 重 久\*

On the Asymmetric Distribution in Hydrology

By Shigehisa Iwai, C.E., Assoc. Member.

**要 旨** 本論文は降水、流量等の水文諸要素に関する統計的非對稱分布に就き主として繼續函数を數理的、方法的に研究し、以て河川工の計畫に於ける有力なる指針を得んとしたものである。第1編に於ては「正規分布の確率變量を對數變換して得た分布」に就き、Brunsの $\Phi$ 級數を鵜呑みにしたGrassbergerの迂遠な理論、方法を根本に溯つて直截簡明に更正し、之を基準として各國最近の文獻を批判、検討した。第2編は上の成果に基き流況の統計的推定を論じたものである。即ち我國2河川の年流況に先づ式(36)、(38)の $W_A$ を當嵌めてこの系統の分布が概ね妥當なる事を識り、爾後の方針を樹てる事が出来た。次に『流量要覽』の如き既往の記録表示法は改善の餘地あるも、之を利用する爲、豊、平、低水量の3標本値から流況、年發電能率等を統計的に表現、計算する新方法として式(73)~(80)を提案の上、11地方別代表河川にも適用して之が發電計畫上甚だ有效なる事、及諸統計的常數値が廣範圍の流況調査に於ける指標となることを確めたのである。之は中央値 $x_0$ と超過及非超過の1對の對稱値 $x_g$ 、 $x_l$ が與へられた場合、式(48)、(70)によつて繼續函数 $W_T$ を表すと言ふ著者の着意に據るものである。

## 目 次

### 序 言

#### 第1編 Gaussの正規分布の確率變量を對數變換して得た分布

1. 基本理論
2. 級數展開
3. 級數展開による方法
  - (a) 3個の標本値を用ひる方法
  - (b) 各種の統計量を用ひる場合
4. 對數確率紙を用ひる特殊法
5. 半圖式試算法
6. 積率法

#### 7. 兩端で限られた分布

- (a) 變量自體の平均値及標準偏差を用ひる場合
- (b) 變量の對數の平均値及標準偏差を用ひる場合
- (c) b及gの推定

#### 8. 諸方法の検討

#### 第2編 流況の統計的推定

9. 流況曲線への適用
  - (a) 計算例
  - (b) 上例の検討
  - (c) 結論
10. 豊、平、低水量の記録のみを用ひる場合
  - (a) 選信省、『流量要覽』に就て
  - (b) 理論的考察
  - (c) 著者の提案する方法
  - (d) 計算例
  - (e) 結論

## 序 言

諸外國では古くから統計數理乃至統計的方法の研究が盛んであるが我國に於ても漸く之の重要性が認められ、各方面でやかましく論ぜられる様になつた。土木部門でも土性<sup>2)</sup>、實驗結果の整理には勿論、交通調査、作業能率の改善等廣範圍に亘つて、相關、信頼度、小標本等に關する最新の理論が將來大いに研究活用さるべきであらう。

併し乍ら轉じて河川工の何たるかを觀ずれば、其の基本たるべき水文學的領域に於てこそ、斯かる統計理論の適用

\* 工學士 京都帝國大學助教授

が最も有効且緊要なる事は何人も否めない筈である。總べての河川工に於て設計、施工には多大の關心が拂はれてゐるに拘らず、その計画の根本要素たる降水、流出等の問題は甚だしく粗雑に扱はれて來たのである。かうした不合理を是正するには、氣象學、純水文學、水分圖學的の研究を要するのは言を俟たないが、更に水文統計學の研究が絶対に缺くべからざるものとなる。

米國に於ては水は重要國家資源の一つであるとし大河水統制計画に處する爲に廣範圍大規模に調査研究を進めて來た。殊に洪水量決定に對しては確率洪水なる概念を把握し、降水量推定に對しては觀測所亘年法にて信頼度を論ずる等統計的研究は甚だ盛んであり、獨逸のこの方面への關心も、數理統計の着實な基礎と相俟つて侮れぬものがある。

著者は河川工に於ける有力な指針を得るために先づ非對稱分布の研究に着手した。敗戦の冷嚴な事實に直面し茫然自失爲す所を知らなかつた我々は、速かに舊套を脱し國土復興の緒に就かねばならぬ。新國土計画に當り重要な役割を占める河水統制計画を如上の見地から再検討し、河水を最高度に利用開發する爲に、本文が我國に於ける水文統計學研究の嚆矢として其の發達の一助となり、延いて新生日本建設の礎ともなれば、著者の幸之に過ぐるものはない。

### 第 1 編 Gauss の正規分布の確率變量を對數變換して得た分布

#### 1. 基本理論

Fechnersches Prinzip,<sup>1)-10)</sup> Loi de L'effet Proportionnel,<sup>11)-18)</sup> Slade Method<sup>19)-21)</sup> 等と稱へられたものは總べて、非對稱分布は確率變量の對數變換を経た Gauss の正規分布により近似的に表されると云ふ原理に基いてゐる。之等の理論的根據は T.N. Thiele, J.C. Kapteyn, G.T. Fechner, F. Galton 等によるのであるが、之を水文學に適用するに就ては A. Hazen<sup>25)</sup> によつて示唆を受けた様に思はれる。

Gauss の正規分布の場合、確率密度は次式で表される。

$$V(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x - m(x)^2} \dots\dots\dots (1)$$

今確率變量の對數變換を行へば、

$$V_E(\log x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 [\log(x/X_0)]^2} \dots\dots\dots (2)*$$

所が本來の確率は不變量であるから、

$$\left. \begin{aligned} V_E(x) &= V_E(\log x) \frac{d \log x}{x} = V_E(\log x) \frac{\log e}{x} \\ &= \frac{k \log e}{x \sqrt{\pi}} e^{-k^2 [\log(x/X_0)]^2} = \frac{1}{X_0} V_E(x/X_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

茲に夫々の母集團に關しては次の如くなつてゐる。

確率變量	平均値	標準偏差	
x	m(x)	$\sqrt{\mu_2} = \text{str}(x) = \sigma$	$h^2 = \frac{1}{2} / \{\text{str}(x)\}^2$
log x	$\bar{m}(\log x) = \log X_0$	$\sqrt{\mu_2} = \text{str}(\log x)$	$k^2 = \frac{1}{2} / \{\text{str}(\log x)\}^2$

\* 以下總べて常用對數を log, 自然對數を ln で示す。

式 (3) に於て  $x_0$  (之は中央値となる) 及  $k$  を種々に變化せしめると、一端は  $x=0$  で限られ他端は限られてゐない多數の非對稱分布曲線が得られる。又  $x_0$  を一定とすれば、 $-k$  の増加に應じて非對稱性が減じ、特に或條件の下に  $x_0 \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$  ならしめると Gauss の正規分布となる。

今一般に確率密度を  $V(x)$  とし、確率變量が  $x$  より小 (又は以下) なる値、及  $x$  以上 (又はより大) なる値をとる確率が夫々累加曲線  $S(x)$  及繼續曲線  $W(x)$  で表されるとすれば、

$$S(x) = \int_{x \text{ の下限}}^x V(x) dx \dots\dots\dots (4)$$

$$W(x) = \int_x^{x \text{ の上限}} V(x) dx = 1 - S(x) \dots\dots\dots (5)$$

式 (3) を適用すると、

$$\left. \begin{aligned} \xi(x) &= k \log(x/x_0); & d\xi &= k \log e \frac{dx}{x}; \\ S_B(x) &= \int_0^x V_B(x) dx = \frac{k \log e}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{x} e^{-k^2 [\log(x/x_0)]^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-u^2} du \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

Gauss の誤差積分を次式で表せば式 (8) の關係が得られる。

$$\Phi_0(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-u^2} du \dots\dots\dots (7)$$

$$S_B(x) = \frac{1}{2} \{1 + \Phi_0(\xi)\}; \quad W_B(x) = \frac{1}{2} \{1 - \Phi_0(\xi)\}; \quad \xi = k \log(x/x_0) \dots\dots\dots (8)$$

確率洪水、流況等我々が問題とするのは主として超過の確率であるから、 $W(x)$  を論ずればよいことになる。

## 2. 級 数 展 開

式 (8) によつて實際の標本に基くものにかなり近い曲線を得る場合は、確率密度に溯つて Gram-Charlier の展開 (Charlier の A 型又は標準型) を有効に用ひることが想起される。即ち Gauss の誤差函數、

$$\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \dots\dots\dots (9)$$

を用ひると、式 (3) 及 (6) から、

$$V_B(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(\xi) \frac{d\xi}{dx} \dots\dots\dots (10)$$

$\frac{1}{2} \varphi_0$  を母函數として、密度函數は次の如く與へられる。

$$V_A(x) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi_0(\xi) + \sum_{r=3}^{\infty} 2A_r \varphi_r(\xi) \right\} \frac{d\xi}{dx} \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} \text{式 (5) から, } W_A(x) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \int_0^{\xi} \varphi_0(\xi) d\xi - \sum_{r=3}^{\infty} 2A_r \int_0^{\xi} \varphi_r(\xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \Phi_0(\xi) - \sum_{r=3}^{\infty} 2A_r \Phi_r(\xi) \right\} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$= W_E(x) - \sum_{r=3}^{\infty} A_r \Phi_r(\xi) \dots\dots\dots (13)$$

$$= W_E(x) - \Phi_1(\xi) \sum_{r=3}^{\infty} A_r (-1)^{r-1} H_{r-1}(\xi) \dots\dots\dots (14)$$

$$= W_E(x) - d(\xi) \dots\dots\dots (15)$$

又式 (5) 及 (12) から,

$$S_A(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi_0(\xi) + \sum_{r=3}^{\infty} 2A_r \Phi_r(\xi) \right\} \dots\dots\dots (16)$$

上の各式に用ひた  $\Phi_s(\xi)$ ,  $\varphi_s(\xi)$ , ( $s=0, 1, 2, \dots$ ) の關係は, Hermite の多項式  $H_s(\xi)$  を用ひて式 (7), (9) より次の如く表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi_s(\xi)}{d\xi} &= \varphi_s(\xi) = \frac{d^s \varphi_0(\xi)}{d\xi^s} = \frac{d^{s+1} \Phi_0(\xi)}{d\xi^{s+1}}; \\ \Phi_{s+1}(\xi) &= \varphi_s(\xi) = (-1)^s H_s(\xi) \varphi_0(\xi) = (-1)^s H_s(\xi) \Phi_1(\xi); \\ H_s(\xi) &= (2\xi)^s - \frac{s(s-1)}{1!} (2\xi)^{s-2} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2!} (2\xi)^{s-4} - \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{\frac{s}{2}} \frac{s!}{(s/2)!}, && (s: \text{偶數}) \\ &(-1)^{\frac{s-1}{2}} \frac{s!}{\{(s-1)/2\}!} 2\xi, && (s: \text{奇數}) \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

又  $\xi$  は  $\log x$  に關する 1 次變換であるから,  $A_r$  を  $\log x$  に就ての平均値  $\log x_0$  の周りの 2 次, 3 次, 4 次, ..... の母集團積率  $\mu_2 = \{\text{str}(\log x)\}^2$ ,  $\mu_3$ ,  $\mu_4$ , ..... で表せば,

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -\frac{k^3 \mu_3}{2 \cdot 3!}; \quad A_4 = \frac{k^4 (\mu_4 - 3\mu_2^2)}{2 \cdot 4!} = \frac{k^4 \mu_4 - \frac{3}{4}}{2 \cdot 4!}; \\ A_5 &= -\frac{k^5 (\mu_5 - 10\mu_2 \mu_3)}{2 \cdot 5!} = -\frac{k^5 \mu_5 - 5k^3 \mu_3}{2 \cdot 5!}; \\ A_6 &= \frac{k^6 (\mu_6 - 15\mu_2 \mu_4 + 30\mu_3^2)}{2 \cdot 6!} = \frac{k^6 \mu_6 - \frac{15}{2} k^4 \mu_4 + \frac{15}{4}}{2 \cdot 6!}; \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

尚次の關係を式 (16) に入れると Bruns の  $\Phi$  級數\*の形をとる。

$$A_r = D_r / 2^r, \quad (\text{但し } r=3, 4, 5, 6, \dots\dots\dots) \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{茲に,} \quad D_3 &= -\frac{2k^3 \mu_3}{3}; \quad D_4 = \frac{k^4 \mu_4}{3} - \frac{1}{4}; \quad D_5 = -\frac{2k^5 \mu_5}{15} + \frac{2k^3 \mu_3}{3}; \\ D_6 &= \frac{2k^6 \mu_6}{45} - \frac{k^4 \mu_4}{3} + \frac{1}{6}; \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

之等を用ひると, 式 (12) の  $W_A(x)$  は次の如く表される。

\* Rietz-Bauer; "Handbuch der Mathematischen Statistik", 1930, S. 157.  
E. Czuber; "Wahrscheinlichkeitsrechnung", 1938, I. S. 405-407 u. 423.

$$W_A(X) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \Phi_0(\xi) - \sum_{r=3}^{\infty} \frac{D_r}{2^{r-1}} \Phi_r(\xi) \right\} \dots\dots\dots (21)$$

又修正項  $A(\xi)$  は式 (15), (14), (18) から,

$$A(\xi) = W_E(X) - W_A(X) = \Phi_1(\xi) \sum_{r=3}^{\infty} A_r (-1)^{r-1} H_{r-1}(\xi) \dots\dots\dots (22)$$

$$= \sum_{r=3}^{\infty} A_r \Phi_r(\xi) \dots\dots\dots (23)$$

式 (22) より,  $A(\xi) = 0$  ならしめる  $\xi$  の有限値は次式の解として求められる。

$$\sum_{r=3}^{\infty} A_r (-1)^{r-1} H_{r-1}(\xi) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

又  $\xi = 0$  なる場合,  $A(\xi) = A(0) = A_0$  とすれば, 式 (22), (17) 及 (23) から

$$A_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=3}^{\infty} A_r (-1)^{r-1} H_{r-1}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{w=3}^{\infty} A_{2w+1} (-1)^w \frac{(2w)!}{w!} \dots\dots\dots (25)$$

$$= \sum_{r=3}^{\infty} A_r \Phi_r(0) \dots\dots\dots (26)$$

### 3. 級数展開による方法

#### (a) 3 個の標本値を用ひる方法

今 修正項  $A(\xi)$  の第一項のみをとる ことによつて満足すれば, 之を 0 ならしめる  $\xi$  の有限値は, 式 (24) より  $A_3 H_2(\xi) = 0$  の解として與へられる。所が  $A_3 = 0$  ならば常に  $W_A(X) \equiv W_E(X)$  となつて意味を爲さない。故に  $A_3 \neq 0$  として上式から,

$$H_2(\xi) = (2\xi)^2 - 2 = 4\xi^2 - 2 = 0, \quad \therefore \xi = \pm 1/\sqrt{2} \dots\dots\dots (27)$$

一方  $\Phi_0(\pm 1/\sqrt{2}) = \pm 0.6827$  (符號同順) であるから,

$$\xi_1 = k \log(x_1/x_0) = +1/\sqrt{2}; \quad \xi_2 = k \log(x_2/x_0) = -1/\sqrt{2} \dots\dots\dots (28)$$

に對し, 式 (15), (12) より夫々次の様になる。

$$W_A(X_1) = W_E(X_1) = 0.15866 = W_1; \quad W_A(X_2) = W_E(X_2) = 0.84134 = W_2 \dots\dots\dots (29)$$

$$\text{又式 (28) から, } x_0 = \sqrt{x_1 x_2}; \quad k = \sqrt{2}/(\log x_1 - \log x_2) \dots\dots\dots (30)$$

今  $X$  に關する分散指數  $\text{strf}(X)$  を,  $\log \text{strf}(X) = \text{str}(\log X) \dots\dots\dots (31)$

で定義すれば,  $\text{str}(\log X) = \frac{1}{\sqrt{2}k} = \frac{1}{2}(\log x_1 - \log x_2)$  であるから,

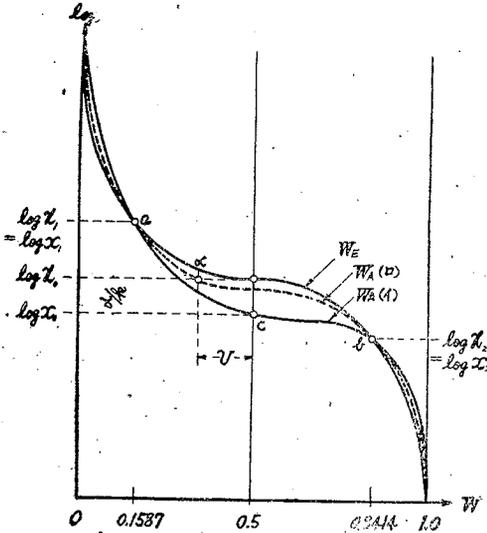
$$\text{strf}(X) = 10^{\text{str}(\log X)} = \sqrt{x_1/x_2} = x_1/x_0 = x_0/x_2 \dots\dots\dots (32)$$

茲で  $x_1, x_2$  の代りに夫々  $W_1, W_2$  に相應する標本値  $x_1, x_2$  を大膽に採用してみる。即ち圖-1 に於て  $W_A$  - 曲線が 2 點 a, b を通り, 従つて  $W_E$  - 曲線も之等の點を通るものとすれば,

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \sqrt{x_1 x_2}; \quad k = \sqrt{2}/(\log x_1 - \log x_2); \\ \text{strf}(X) &= x_1/x_0, \quad \text{又は } x_0/x_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$A_3$  を推定するには次の (イ) 及 (ロ) の 2 方法が用ひられる。

圖-1.



(イ) 式 (23) に於て第 1 項のみをとる,

$$A_3 = A(\xi) / \Phi_3(\xi) \dots\dots\dots(34)$$

今  $W_A$  曲線が  $W=0.5$  なる標本値  $x_0$  に相當する點 c を通るとして (圖-1 参照),

$$\xi(x_0) = k \log(x_0/x_0) = -\alpha \dots\dots\dots(35)$$

とすれば,  $W_A(x_0) = 0.5$  なることと式 (15) 及 (8) とから,

$$A(\alpha) = -\frac{1}{2} \Phi_0(-\alpha) = \frac{1}{2} \Phi_0(\alpha)$$

之を式 (34) に用ひて,

$$A_3 = \frac{1}{2} \Phi_0(\alpha) / \Phi_3(-\alpha) = \frac{1}{2} \Phi_0(\alpha) / \Phi_3(\alpha)$$

若し  $x_0$  と  $X_0$  との差が僅少ならば  $\alpha$  は非常に小となるから Maclaurin 級数の第 2 項迄とることによつて,

$$\Phi_0(\alpha) \doteq \Phi_0(0) + \alpha \Phi_1(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \alpha,$$

$$\Phi_3(\alpha) \doteq \Phi_3(0) + \alpha \Phi_4(0) = -2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\therefore A_3 = -\alpha/4$$

之と式 (13), (35) とから,

$$\left. \begin{aligned} W_A(x) &= W_E(x) + \frac{\alpha}{4} \Phi_3(\xi); \quad \xi = k \log(x/x_0) = k \log(x/x_0) - \alpha; \\ \alpha &= k \log(x_0/x_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

(ロ) 式 (26) に於て第 1 項のみをとる,  $A_3 = A_0 / \Phi_3(0) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \Delta_0 \dots\dots\dots(37)$

今  $W_A$  曲線が  $x=x_0$  なる標本値に相應する點 d を通るとして (圖-1 参照), 之に對する  $d_0=v$  を原表から求めて置けば, 式 (13), (37) から,

$$W_A(x) = W_E(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} v \Phi_3(\xi); \quad \xi = k \log(x/x_0) \dots\dots\dots(38)$$

一ヶ年間の流況等を取扱ふ場合には, 信用の置けるものとして標本値  $x_1, x_2$  を直ちに採用し, 更に他の標本値とから式 (33), (36)<sup>1)</sup> 又は式 (33), (38)<sup>2)</sup> によつて超過の確率と  $x$  との關係を容易に求めることが出来るのである。

(b) 各種の統計量を用ひる場合 \*

上の 3 個の標本値を其の儘使ふことを躊躇せねばならぬ様なときには, 各種の統計量から  $x_0, k, \text{strf}(X), A_3$  等を推定する。即ち  $n$  個の觀測値  $x_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$  から,

$$\left. \begin{aligned} \log x_0 &= \left( \sum_{i=1}^n \log x_i \right) / n, \quad x_0 = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}; \\ \text{strf}(\log X) &= \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left( \log \frac{x_i}{x_0} \right)^2}{(n-1)}}; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \text{str}(\log X) \right\}; \quad \text{strf}(X) = 10^{\text{str}(\log X)};$$

$$\mu_3 = \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \log \frac{x_i}{X_0} \right)^3 \right\} / (n-1); \quad A_3 = -\frac{1}{12} k^3 \mu_3$$

として次式を用ひる。

$$W_A(X) = W_B(X) - A_3 \Phi_3(\xi); \quad \xi = k \log(X/X_0) \quad \dots\dots\dots (40)$$

この時は作圖に當り、式 (32) を書改め、次式を用ひると便利である。

$$\left. \begin{aligned} \log X_1 &= \log X_0 + \text{str}(\log X); & X_1 &= X_0 \cdot \text{strf}(X) \\ \log X_2 &= \log X_0 - \text{str}(\log X); & X_2 &= X_0 : \text{strf}(X) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

Grassberger は  $A(\xi)$  の初項のみをとる之等の場合にその結果を次の形で示すことを推してゐる。

$$X_0 / (0.5 - A_0) \times 100\% \times \text{strf}(X) \dots\dots\dots (42)*$$

修正項  $A(\xi)$  を第 1 項にて止めない 場合には、式 (39) の如く  $\mu_3$  の如く  $\mu_4, \mu_5, \dots\dots$  を推定して式 (18) から  $A_4, A_5, \dots\dots$  を求めればよいが<sup>5)</sup>、この様に高次の積率を限りある標本から推定するのは危険でもあり、且計算も面倒である。

#### 4. 對數確率紙を用ひる特殊法

上記諸方法によつて對數確率紙上に  $W_A$  曲線を描くと兩端でも相當の彎曲を呈する。他方觀測値は中央部ほど密であり之と比べて  $W_A$  曲線を判ずるのは容易であるが、確率洪水の推定等に當り  $W$  の甚だ小さい値が取扱はれる場合に、必要となる端の部分で疎らな觀測値に對し彎曲を假定することは危険である。この爲には次式を用ひ、兩端部では略々直線を以て外挿せしめる様にする。<sup>5) 9)</sup> 今  $V$  を以て對數確率紙上での前記  $A_0$  に相當する百分率を表すものとして、

$$W_Z(X) = \frac{1}{2} \{ 1 - \Phi_0(\eta) \}; \quad \eta = \xi - V \cdot I(\eta); \quad \xi = k \log(X/X_0) \dots\dots\dots (43)$$

$$V = \frac{100(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{\pi}} 2\sqrt{2} k^3 \mu_3 = 7.79 \mu_2^{-1.5} \mu_3 \dots\dots\dots (44)$$

$$I(\eta) = \frac{\pi}{100(\sqrt{2}-1)} \left\{ \int_0^\eta \Phi_0(u) du - \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

上の諸式中の  $\log X_0$  及  $k, \mu_2$  (この両者は  $\text{str}(\log X)$  から計算する),  $\mu_3$  は式 (39) を用ひて推定し、 $\eta$  と  $I(\eta)$  との関係は式 (45) に基いて豫め作つて置いた數表<sup>5)</sup> を引いて知ることが出来る。

任意の  $W_Z$  に相當する  $X$  を求める時には、式 (43) の右 2 式を纏め、 $\log X = \log X_0 + \sqrt{2} \{ \text{str}(\log X) \} \eta + \sqrt{2} \{ \text{str}(\log X) \} V \cdot I(\eta)$  として用ひると便利である。逆に  $X$  より  $W_Z$  を求める場合は試算を必要とするから、前以て畫いた  $W_Z$  曲線で見當をつけた方がよい。之の作圖に當つては、圖-2 の如く先づ  $W_1 = 0.15866$ ,  $W_2 = 0.84134$  に相當する  $\log X_1, \log X_2$  を上式を用ひて計算し、この 2 點を結んで補助の直線を引く。次に  $V$  の正負を考慮して圖上にとり、補助線迄の縦距差を  $\gamma$  とする。この點と補助線上で 17.3%, 82.7% の 2 點及夫々 4.0%,

\*  $\times$  は  $\times$  又は  $+$  の意味で古典誤差論の  $\pm$  記號に當る。

96.0%; 0.73%, 99.27%; 0.09%, 99.91% に於ける補助線からの縦距差が  $2\gamma$ ;  $4\gamma$ ;  $6\gamma$  となる 6 點, 計 9 點を結べば容易に  $W_Z$ -曲線を描くことが出来る。

5. 半圖式試算法

Gibrat は級数による修正を行わないで, 式 (2), (8) の形を其儘用ひることとし, 先づ所謂 Loi de l'effet proportionnel に基いて式 (6) の形の變換式を導き<sup>13)</sup>,  $\xi$  の中に常數  $c_0'$  及  $b_0'$  を入れて,  $d\xi(x) = c_0' dx / (x + b_0')$  と置いた。之を  $x$  に就て積分すれば次式を得る。

$$\xi(x) = c_0' \log(x + b_0') + j \dots (j; \text{積分常數}) \dots (46)*$$

今母集団に就ての  $\log(x + b_0')$  に関する平均値及標準偏差を夫々

$m\{\log(x + b_0')\}$  及  $str\{\log(x + b_0')\}$  とすれば  $c_0'$  及  $j$  は次く如くなる。

$$\left. \begin{aligned} c_0' &= \frac{1}{\sqrt{2}} [str\{\log(x + b_0')\}]^{-1}; \\ j &= -c_0' [m\{\log(x + b_0')\}] = \\ &= -c_0' \log(x_0 + b_0') \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

以上のことは理論的には式 (8) 中の  $x$  の原點を  $x$  の最小値 ( $-b_0'$ ) に移したに過ぎないが,  $b_0'$  を次節以下に述べる様な何等かの方法により豫め定めて置かない限り, 例へば式 (39) の如くにして  $c_0'$ ,  $j$  を定める譯には行かない。Gibrat は式 (47) の關係を無視して, (照査の際には用ひた), すべての觀測値が式 (46) の直線關係をなるべく満足せしめる様に, 半圖式的に試算を繰返して 3 常數

$c_0'$ ,  $b_0'$ ,  $j$  を同時に推定し, 觀測曲線への當嵌めを良からしめようとした。

之の順序は圖-3 の如く示される。先づ個々の觀測値  $x$  の超過確率  $W_0$  を標本から計算し, 之と等しい  $W_Z(\xi')$  を數表で引いて  $\xi'$  を求める。別に最小觀測値より小なる任意の  $b_0'$  を假定して  $\log(x + b_0')$  を求めて置き,  $\xi'$  及  $\log(x + b_0')$  を横, 縦距として點をとつて行く。<sup>14) 15)</sup> 諸點が一直線上に並ぶ迄  $b_0'$  を色々修正し ( $b_0' = 0$  より始めて慣れれば數回で済む), 略々満足すべき  $b_0'$  を定めると  $c_0'$  及  $j$  は該直線の方程式から同時に求め得る。

繼續函數は之等  $c_0'$ ,  $b_0'$ ,  $j$  を用ひ次式により表される。

圖-2.

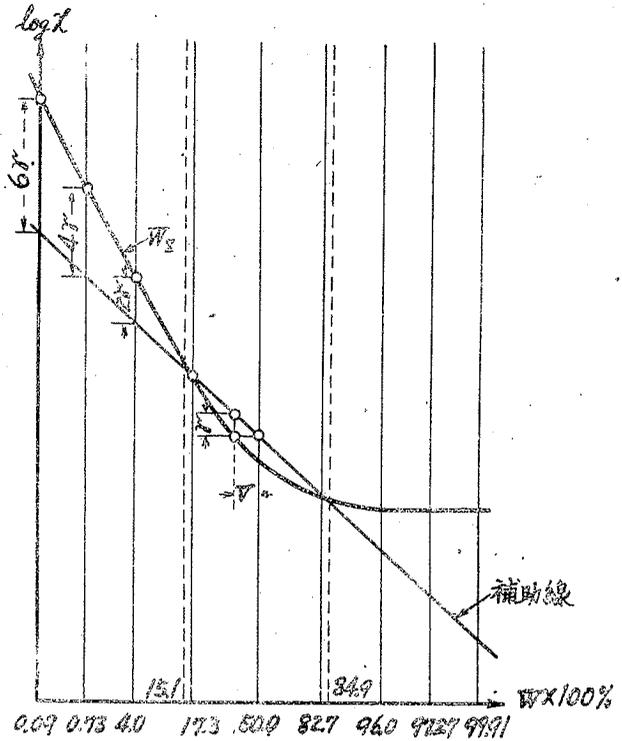
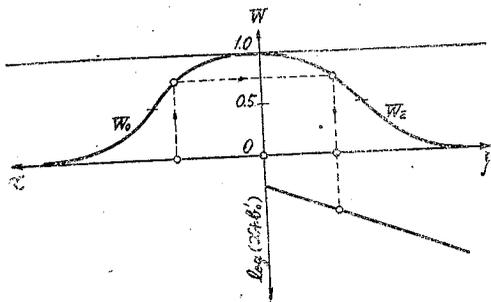


圖-3.



\* Hazen は結果的に見て之と同じ式を用ひてゐる。<sup>25)</sup>

$$W_G(x) = \frac{1}{2} [1 - \Phi_0(\xi')] ; \quad \xi' = c_0' \log(x + b_0') + j \dots \dots \dots (48)$$

6. 積 率 法

Slade は  $x$  の原點をその平均値  $m(x)$  に移したものを  $x'$  とし、始めに式 (49) の如く置き、積率法により各常數を求め式 (50) の結果を得た。

$$V(x) = ae^{-c'^2(\ln a'/(x'+b'))^2} \dots \dots \dots (49)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \mu_3' / (\sqrt{\mu_2'})^3 ; \quad A = (\beta/2) + \sqrt{(\beta^2/4) + 1} ; \quad B = (\beta/2) - \sqrt{(\beta^2/4) + 1} ; \\ t &= A^{1/3} + B^{1/3} ; \quad a = (1/\sqrt{2\pi\mu_2'}) t (t^2 + 1) / \sqrt{\ln(t^2 + 1)} ; \\ b' &= \sqrt{\mu_2'} / t = \sigma / t ; \quad c' = \{2 \ln(t^2 + 1)\}^{-0.5} = [2 \ln \{(\sigma^2 + b'^2)/b'^2\}]^{-0.5} ; \\ d' &= t (t^2 + 1)^{1.5} / \sqrt{\mu_2'} = (t^2 + 1) \sqrt{\sigma^2 + b'^2} / b'^2 . \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

今適當な條件のもとに  $c' \rightarrow \infty$ , ( $t \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$ ) とすれば、この  $V(x)$  は Gauss の正規分布に近づく。<sup>19)</sup> 又式 (49) より繼續函數を導けば  $a$  消えて次式を得る。

$$W_s'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c'}^{+\infty} \ln \frac{d'(x'+b')}{t^2+1} e^{-u^2} du \dots \dots \dots (51)$$

尙  $\mu_2'$ ,  $\mu_3'$  は  $x$  (又は  $x'$ ) に就ての平均値 (又は原點) の周りの 2 次及 3 次の母集團積率であるが、式 (39) の  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  の如く不偏性を許し得ないから、次の様に標本積率を其儘用ひる。

$$\mu_2' = \sum_{i=1}^n x_i'^2/n ; \quad \mu_3' = \sum_{i=1}^n x_i'^3/n ; \quad x_i' = x_i - m(x) ; \quad m(x) = \sum_{i=1}^n x_i/n \dots \dots \dots (52)$$

式 (52), (50) により  $m(x)$ ,  $t$ ,  $b'$ ,  $d'$  及  $c'$  を定めると、繼續函數は式 (51) を書改めた次式によつて求められる。

$$W_s'(x) = \frac{1}{2} [1 - \Phi_0(\xi')] ; \quad \xi' = c' \ln \frac{d'(x'+b')}{t^2+1} ; \quad x' = x - m(x) \dots \dots \dots (53)$$

茲で次の如く置けば上式は式 (48) と全く同じ形となり、下の 3 常數の間に式 (47) の關係が成立する筈である。

$$c_0' = c' \ln 10 = 2.3026 c' ; \quad b_0' = b' - m(x) ; \quad j = c' \ln \frac{d'}{t^2+1} \dots \dots \dots (54)$$

7. 兩端で限られた分布

$x$  の下限を考へると、 $W_E$  及式 (12) の  $W_A$  では 0 となり、 $W_G$  では圖上曲線の適合性により制約され、 $W_s'$  では積率の函數として純統計的に推定されたことになる。今流量の如き水文現象に就ては、大抵の河川では乾涸水時でも多少の流れはあるから、常に下限を 0 とするのは妥當性を缺き、其他のものも水文學の見地からの下限と矛盾を生じ易い。例へば式 (48) {又は式 (53)} に於て  $b_0' > 0$  {又は  $b' = \sigma/t > \sum_{i=1}^n x_i/n = m(x)$ } となれば  $x$  の下限は負となり、負の流量から始まるとせねばならない。かゝる結果は  $W_G$  を日降水に適用した時に多く<sup>18)</sup>、この際は (蒸發量 > 降水量) の場合をも認めると一應許され得るが<sup>13)</sup>、再考の餘地がある。 $x$  の上限に就ても上記諸方法の如く無限大迄とすることは更に検討を要する。例へば種々の異論<sup>20)</sup>はあるが、生じ得べき絶對最大洪水量は降水、流域等の各條件要素の組合せから推定可能とも考へられる。前節迄に述べた各分布の内  $W_s'$  のみは上下兩限値を有するが、之等も結果的に式 (44) の  $V$ 、従つて統計量  $\mu_2$  及  $\mu_3$  により定まるのみで、水文條件も考慮されてゐない。

兩端で限られた分布に對して Pearson I 型を用ひると純統計的には或程度解決出来るが<sup>23)</sup>、4 次積率迄が這入つて來て面白くない。洪水統計等の小標本の場合は、3 次積率の推定にさへ相當の誤差を伴ふのである。今  $W_s$  を用ひる時に若し何等かの方法で下限  $b'$  を定めて置けば、式 (50) にて  $l = \sigma/b'$  を利用し、 $\mu_3'$  を求めないでも他の常數を定め得る。Slade は之から類推して上、下限に相當する 2 常數  $g, b$  を用ひ、 $(b+x')/(g-x')$  の對數をとることを提案した。

(a) 變量自體の平均値及標準偏差を用ひる場合

式 (53) 及 (50) を擴張すると次の様になる<sup>10)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} W_s(x) &= \frac{1}{2} \{1 - \Phi_0(\xi'')\} : \xi'' = p \cdot \ln \{d(b+x')/(g-x')\}, \text{ (但し } g > b \text{ とす)}; \\ x' &= x - m(x); \quad p = \{(g-b)/(g+b)\}^{0.5}, \quad c = \{2 \ln C\}^{-0.5}; \\ d &= (g/b) C^{0.5}; \quad C = \{g^2(\sigma^2 + b^2) - 4\sigma^2 bg\} / \{b^2(\sigma^2 + b^2) - 4\sigma^2 bg\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(55)$$

茲に  $m(x)$  又  $\sigma(\sqrt{\mu_2}')^*$  は式 (52) から計算し、 $b$  及  $g$  は非統計的に水文學的判斷によつて定める。尙上式を實算する際は、 $x$  の單位を  $x/m(x)$  に變へて行ふと便利である<sup>20)</sup>

若し上限  $g$  の  $\infty$  となると之は式 (53) と同じことになり、更に  $b=0$  とすると式 (8) となる。下限  $b$  のみが  $\infty$  となると、上端が限られ下方は無限の分布を生じ偏りが反對となるだけである。又  $b=g$  なる場合は、 $\xi(x) = K_1(\tan^{-1}x - K_2)$  の形で Grassberger が暗示した如く<sup>1)</sup>、

$$\xi'' = (\sqrt{b^2 - 3\sigma^2} / 2\sqrt{2}\sigma) \ln \{(b+x')/(b-x')\} \dots\dots(56)$$

となり、更に  $b \rightarrow \infty$  とすると  $\xi'' \rightarrow x' / (\sqrt{2}\sigma)$  を得るから、Gauss の正規分布に近づく。従つて式 (55) は最も一般的な分布を表し、前述の總べての場合を包含することになる。

(b) 變量の對數の平均値及標準偏差を用ひる場合

式 (55) に於て  $\xi''$  は式 (54) 及 (48), (47) の關係と同様に次の如く書改められる。

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= c_0 \{ \log \{(x'+b)/(g-x')\} - \log \{(x'_0+b)/(g-x'_0)\} \}; \\ c_0 &= p \cdot c \cdot \ln 10 = 2.3026 p \cdot c; \quad (x'_0+b)/(g-x'_0) = 1/d; \\ x'_0 &= x_0 - m(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots(57)$$

従つて  $p$  と  $c$  は一緒に考ふべきものであつた。又式 (55) の様に生の儘の變量に就ての  $\sigma$  及  $m(x)$  を含む複雑な形を用ひるよりも、4 迄の如く變量の對數に關する平均値及標準偏差を利用すれば遙に簡單であり、且正規型に近い母集團を取扱ふことになるから、之等はより統計的な意味を持つ譯である。今式 (58) の如き記號を用ひると式 (47) の關係に於ける如くにして式 (59) を得、更に之等は式 (52) と同様に (不偏性を許さず) 式 (60) から推定することが出来る。

$$l(x') = \log \{(x'+b)/(g-x')\}; \quad l_0 = \log (1/d) \dots\dots(58)$$

$$l_0 = m \{l(x')\}; \quad c_0 = 1 / [\sqrt{2} \text{str} \{l(x')\}] \dots\dots(59)$$

\* 式 (39) と同様に分母を  $(n-1)$  とすることもある<sup>20)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} m\{l(x')\} &= \sum_{i=1}^n l(x')/n : \\ \text{str}\{l(x')\} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \{l(x')-l_0\}^2/n} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{l(x')\}^2 - l_0^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(60)$$

之等の  $c_0$ ,  $l_0$  及  $l(x')$  を用ひると繼續函數は式 (55) 及 (57) より次の如く表される<sup>21)</sup>。

$$W_K = \frac{1}{2} \{l - \Phi_0(\xi')\}; \quad \xi' = x - m(x); \quad \xi'' = c_0 \{l(x') - l_0\} \dots\dots\dots(61)$$

(c)  $b$  及  $g$  の推定

$b$  及  $g$  の推定は純統計的乃至水文學的に行はない限り頗る曖昧なものとなる。之等の値に多少の變化があつても、繼續曲線の中央部には大して影響を及ぼさないが兩端部は著しくかはる。特に確率洪水推定等の場合は  $\xi''$  の大きい上端部が重要な意味を持つから、 $b$  及  $g$  の推定は慎重に行はねばならない。Kimball は全く主觀的な水文學的判斷よりは、寧ろ兩端部で夫々約 10% の範圍に於ける觀測値への適合度を檢定して  $b$  及  $g$  を定むべきであると、その爲に Van Uven の圖式檢定法を補助として之等の範圍内で夫々母集團及標本に關する分散が等しくなる様に、試算によつて 2 常數を定めたのである。この主旨は 4 に於けるとは反對の趣きを呈し、種々議論されてゐる所である<sup>21)</sup>。

8. 諸方法の檢討

$W_E$  によつて或程度まで實際に近い繼續函數が表される場合、之を其の儘用ひることを許せば比較的簡單であるが、更に近似を進める爲に種々の工夫が講じられて來たのである。即ち、 $W_A$  は級數展開により行ふもので、式 (36), (38) 又は式 (40) は第 2 項で止め、夫々中央の 3 點で適合せしめるか又は 2 次積率を統計的に推定したのである。更に近似を進めるには次々の項をとればよいのであるが、高次積率の推定に當惑し、又それ程の多項を必要とするときには他の母函數を用ひるべきであるとも思はれる。 $W_E$  を其の儘とした代りに、媒介變數に於て展開を試みた\*のが  $W_F$  である。又同じ方針の下に、下限  $b_0'$  を入れた變量の對數をとつて近似を行ふ事とし、甚だ非統計的に全體としての適合を重視したのが  $W_G$  であり、他方純數理統計的に處理したのが  $W_S'$  である。又  $W_S$  及  $W_K$  は上、下限たる  $g$ ,  $b$  を入れて水文學的に妥當性を與へようとしたものである。尙どの部分で觀測値への適合性を良からしめるかに就ても各種の見解がある。

統計的健全性と觀測値への適合性とは必ずしも兩立しないので、この兩者の何れを如何に重く見るかによつて上述の差異が生じた譯である。又下記の如く各種の事象を取扱つて色々の方面に利用されるから、純水文學、水文圖學及河川工學の立場からも檢討し、標本の性質や使用目的に應じて最も適當な方法をとる事が緊要であり、この點に關する著者の見解は第 2 編に於て明かにしたいと思ふ。

洪水生起の超過確率の研究は約 50 年前に米國に於て萌芽し<sup>22)</sup>、經驗公式を経て Pearson 流<sup>23)24)</sup>、確率紙法<sup>25)</sup>、繼續線法<sup>26)27)</sup>等の各方法で研究せられ、歐洲諸國の注目を惹く事となつた。次いで約 10 年前から本論に述べた分布が各國で別個に、而も殆ど同時に取擧げられたのは甚だ吾人の興味を唆る所である。又最近は降水の確率を解析

\* 式 (43) で、 $\xi = K_1 + K_2\eta + \sum_{r=1}^{\infty} K_{r+2} I_r(\eta)$ , ( $I_r$  は  $\Phi_0$  の  $\eta$  に就ての  $r$  重積分) が有效であることが豫言されてゐる<sup>5)</sup>。

し<sup>9)</sup>18)<sup>28)</sup>、流出率を考慮して確率洪水を求める方法が行はれ<sup>4)</sup>10)、更に次編に述べる流況の推定も新問題となつてゐる<sup>1)</sup>11)。この様な研究は計畫水量や貯水池容量決定等の基礎となり、洪水防禦、河川改修、發電水力、上下水道及灌溉の如き凡ゆる治水及利水工、延いては之等の綜合計畫の理論的根據を與へるものであるが、我國に於ては未だ開始されてゐない様に思はれる。

諸外國に於て、最頻値、中央値及平均値の順序が狂つて居る様な特例(例へば、Mackenzie River; Australiaの洪水記録<sup>29)</sup>)を除き、この系統の論文の基本となる「Gaussの正規分布の確率變量を對數變換して得た分布」の有効性が檢證されてゐる以上、我國に於ても程度差違この分布に基いて研究を進め得るものと信ずる。又信頼度を論じてゐない統計結果は、縮尺を添へない地圖と同じく意味がないから、著者は之を探究の上、改めて本論を再検討する所存である。

## 第2編 流況の統計的推定

### 6. 流況曲線への適用

#### (a) 計算例

前編に述べた非對稱分布の流況への適用を、先づ3個の標本値のみを用ひる式(36)及(38)の $W_A$ によつて試してみる。

例-1 太田川、鹿ノ巢、大正9年(閏年)、(遞信省、『水力調査書』第1卷):同書第21號表、水位流量年表より作つた流況表に於て、最頻値は650個( $Q_{299} \sim Q_{276}$ )、又は602個( $Q_{287} \sim Q_{287}$ )、中央値は986個= $Q_{183}$ 、平均値は1600個( $Q_{93} \sim Q_{94}$ )附近であり、其の順序から言ふとこの分布の適用は妥當である。

式(29)から、 $366 W_1 = 58$ 日、 $366 W_2 = 308$ 日、又 $366/2 = 183$ 日。故に流況表上の流量 $Q_{58}$ 、 $Q_{308}$ 及 $Q_{183}$ (表-1参照)を拾ひ夫々 $x_1$ 、 $x_2$ 及 $x_0$ とし、式(33)及(36)より、 $x_0 = 1179.96$ 個、 $k = 2.11282$ 、 $\text{strf}(x) = 2.161$ 、 $\alpha = 0.164778$ 、故に流況曲線の方程式として次式を得る。

$$W_A(x) = W_B(x) + 0.04119 \Phi_3(\xi), \quad \sqrt{2}\xi = 2.98798 \log x - 9.17868^*$$

任意の流量に對する繼續日數を知るには、この $W_A$ に366日を乗ずればよい。今上記水力調査書の流況表と同書第20圖の平分曲線\*\*を其儘移した圖-4の $W_0$ -曲線とから豊、平、低、渴水量及30日、183日、308日、最大、最小流量を求め、之等に對する超過確率及繼續日數を上式により計算すると表-1の様になる。

逆に繼續日數又は超過確率を與へて流量を求めるには面倒な試算を要するから、先づ表-1中の $W_A$ と流量の關係を圖-4の $W_0$ -曲線の如く示した上で、之に準據して各種の $W_A$ の値に對する流量(整數をとる)を算出すると表-2を得る。

この場合式(42)によれば、流況を $1180$ 個/ $40.7\% \times 2.161$ の形で表すことも出来る。

圖-4に於て、600個附近より右の部分では $W_A$ は $W_0$ よりかなり小流量を與へるが、之より左では兩者は概ね一致する。

\* 以下の計算には7桁對數表を用ひ、又『統計數値表』I(河出書房)第9數表より $W_B$ 及 $S_B$ を、第17數表 $\{\phi^{(2)}(t)\}$ に $4\sqrt{2}$ を乗じて $\Phi_3$ を求めた。この爲に $\sqrt{2}\xi$ の形で表したのである。

\*\* 之は流況表に對應する圖上の諸點(但50日流量以下)を目測で平分する様に畫かれたものである。又表-1の第6欄には、原圖では誤つてゐた値を訂正の上記入した。

表-1. (例-1)

$x$	流況表より求めた流量	備考	超過確率 $W_A$	繼續日数	$W_0$ より求めた流量	超過確率 $W_A$	繼續日数
最大流量	21800		0.0010	0.4			
30日流量	3990		0.0969	35.5			
58日流量	2550		0.1587	58.1	2460	0.1648	60.3
豐水量	1600	$Q_{95} \sim Q_{97}$	0.2738	100.2	1640	0.2652	97.1
183日流量	986	$Q_{182} \sim Q_{183}$	0.5065	185.4	990	0.5042	184.5
平水量	986		0.5065	185.4	980	0.5101	186.7
低水量	650	$Q_{269} \sim Q_{275}$	0.7528	275.5	650	0.7528	275.5
308日流量	546	$Q_{305} \sim Q_{310}$	0.8402	307.5	550	0.8390	307.1
湯水量	434		0.9301	340.4	450	0.9184	336.1
最小流量	349		0.9830	359.8	360	0.9773	357.7

圖-4.

例-1: 太田川水系太田川鹿ノ巢測水所 (順位 280)

流況曲線圖 (大正9年)。流域面積 962.0 km<sup>2</sup>

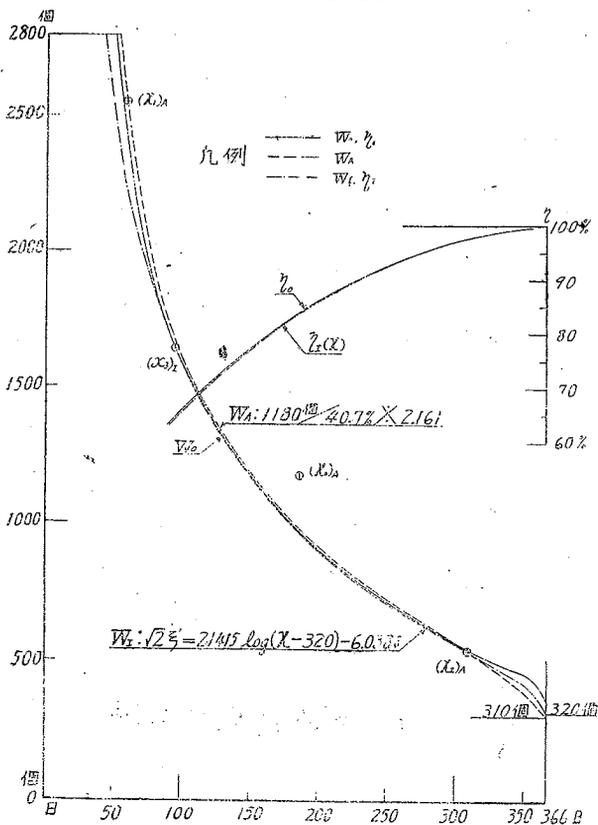


表-2. (例-1)

超過確率 $W_A$	繼續日数	$x$	流量
0.0820	30	30日流量	4528
$W_1=0.1587$		$(x_1)_A$	2550
0.2596	95	豐水量	1668
0.5000	183	183日流量	997
0.5055	185	平水量	988
0.7514	275	低水量	652
$W_2=0.8413$		$(x_2)_A$	546
0.9699	355	湯水量	373
1.0000	366	最小流量	310

平均流量及年發電能率 今  $x$  以下の  $W_A$ -曲線及兩座標軸で圍まれた面積を  $F_A(x)$  とすれば、式 (12) から次式が成立する。

$$2F_A(x) = \int_0^x \{1 - \Phi_0(\xi) - 2A_3\Phi_3(\xi)\} d\xi$$

$$= \{1 + \Phi_0(\xi - C_1)\} m(x) - e^{-(\xi - C_1)^2} (\xi + C_1) C_2 m(x) + \{1 - \Phi_0(\xi)\} x \dots \dots \dots (62)$$

茲に、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 1/(2k \log e), \\ C_2 &= -16A_3 \{ \sqrt{\pi} (1 - 16A_3 C_1^3) \} ; \\ C_3 &= e^{-8A_1 C_1 + C_1^2} (1 - 16A_3 C_1^3) ; \\ m(x) &= C_3 x_0 \end{aligned} \right\} (63)$$

式 (63) の  $m(x)$  は平均流量を表し、本例の場合

合  $-A_3 = \alpha/4 = 0.04119$  を用ひて計算すれば 1757 個となるが、之に對して原流況表から求めた平均流量 1608 個は、相當の開きを示してゐる。又最大使用水量を  $\chi$  とし漏水補給の無い場合の年發電能率  $\eta_A\%$  は、式 (62) 及 (63) から次式の如く導かれるが、實際上の數値計算は煩雜である。

$$\eta_A = 50 \{ [1 + \Phi_0(\xi - C_1) - e^{-(\xi - C_1)^2} / (\xi + C_1) C_2] m(\chi) / \chi + [1 - \Phi_0(\xi)] \} \dots \dots \dots (64)$$

式 (36) の代りに式 (38) を用ひることとし、流況表から  $v$  を求めると、1190 個 =  $Q_{149}$ 、1170 個 =  $Q_{150}$  であるから、 $\chi_0 = 1180$  個は約 149.5 日流量に相當し、 $v = 0.0915301$ 、 $\therefore (\sqrt{\pi}/4)v = 0.040558$ 。従つて式 (36) による結果と日単位では殆ど差異を生じない。

例-2 阿武隈川、供中、昭和 7 年 (閏年)、(逓信省電氣局、『流量調査方法』、昭和 12 年)：同書第 4 表の流況表によると、著しく頻度の多い流量は  $50.5 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $Q_{183} \sim Q_{176}$ )、 $26.7 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $Q_{322} \sim Q_{332}$ )、 $34.9 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $Q_{264} \sim Q_{273}$ ) の 3 つで、中央値は  $48.5 \text{ m}^3/\text{s} = Q_{183}$ 、平均値は  $69.0 \text{ m}^3/\text{s} = Q_{109}$  であり、最頻値  $50.5 \text{ m}^3/\text{s}$  は中央値より大きくなるが、次いで頻度の多い流量は 2 つとも中央値より小であるからこの分布型の適用は許されるものとする。例-1 と同様に  $Q_{88} = x_1$ 、 $Q_{308} = x_2$ 、 $Q_{183} = x_0$  (表-3 参照) として、

$$\chi_0 = 53.3244 \text{ m}^3/\text{s}, \quad k = 2.81430, \quad \text{strf}(\chi) = 1.783; \quad \alpha = 0.115905,$$

$$W_A(\chi) = W_E(\chi) + 0.02898 \Phi_3(\xi), \quad \sqrt{2}\xi = 3.98003 \log \chi - 6.87321$$

上式による計算の結果は、表-1 の左半部及表-2 と同様に夫々表-3 及表-4 (流量の有効數字は 3 桁迄とする) の如くなる。

圖-5 に於て、この流況  $53.3 \text{ m}^3/\text{s} / 43.5\% \times 1.783$  は  $W_A$ -曲線とし畫かれ、又多様の測點は流況表から直ちに求めた觀測値 (4 日間隔) を示したもので、 $W_A$  は豐水量附近を除いて概ね各觀測値より僅かに大きい流量を與へることが分る。

平均流量としては、 $-A_3 = \alpha/4 = 0.02898$  を式 (63) に用ひて  $m(\chi) = 71.3 \text{ m}^3/\text{s}$  を得るが、之は原流況表より求めた値  $69.0 \text{ m}^3/\text{s}$  と略々等しい。

尙式 (38) を用ひると、流況表に於て  $\chi_0 = 53.3 \text{ m}^3/\text{s} = Q_{183}$  であるから、 $v = 0.0702186$ 、 $\therefore (\sqrt{\pi}/v) = 0.017555$ 。従つて式 (36) による結果との差異は例-1 の場合よりも著しくなつてゐる。

表-3. (例-2)

表-4. (例-2)

$v$	流況表より求めた流量	備考	超過確率 $W_A$	繼續日數	超過確率 $W_A$	繼續日數	$\chi$	流量
	$\text{m}^3/\text{s}$			日		日		$\text{m}^3/\text{s}$
30日 流量	128.0	} $Q_{182} \sim Q_{185}$	0.0920	33.7	0.0820	30	30日 流量	136.0
58日 流量	95.1		0.1587	58.1	$W_1 = 0.1587$		( $x_1$ ) <sub>A</sub>	95.1
豐水量	75.0	} $Q_{274} \sim Q_{276}$	0.2419	88.5	0.2596	95	豐水量	72.1
185日 流量	48.5		0.5023	183.8	0.5000	183	183日 流量	48.6
平水量	48.5	} $Q_{308} \sim Q_{312}$	0.5023	183.8	0.5055	185	平水量	48.3
低水量	34.1		0.7607	278.4	0.7514	275	低水量	34.6
308日 流量	29.1		0.8560	313.3	$W_2 = 0.8413$		( $x_2$ ) <sub>A</sub>	29.9
漏水量	18.5		0.9952	364.2	0.9699	355	漏水量	21.5
最小流量	14.4		1.0090	369.3	1.0000	366	最小流量	17.6

(b) 上例の検討

上の2例に就て見るに、 $W_A$ より計算した繼續日数が流況表の $Q_{30}$ 附近で共に4,5日程度多く出てゐることは一應注目せねばならぬが、之とても實測最大流量よりも大きい左端部の流況表上の値は、總べて8點法によつて整定された流量曲線の方程式を基として居るから當てにはならない。

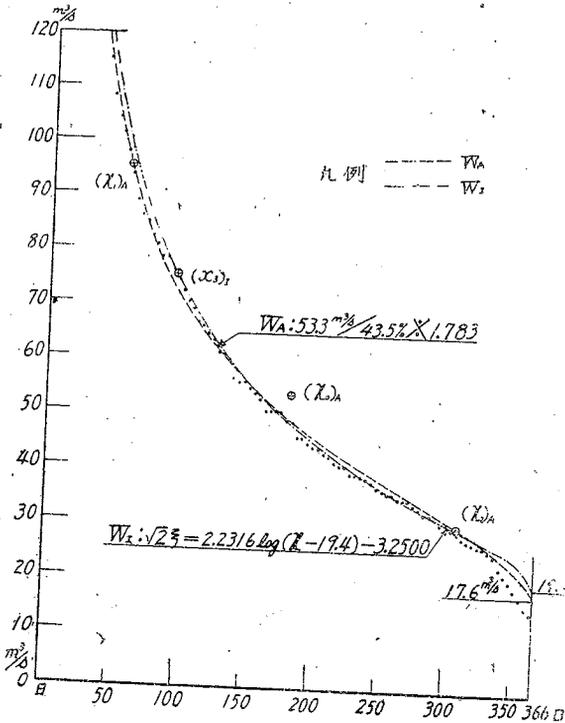
次に7に於ては觸れなかつたが、上例に用ひた式(33)及(36)の $W_A$ による場合の下限を吟味しよう。式(12)に於て $A_3$ 以上を省いたのであるから、之と式(17)及(6)を用ひて次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_A(x)}{dx} &= -\frac{1}{2} \Phi_1(\xi) + \{1 - 2A_3 H_3(\xi)\} \frac{d\xi}{dx} \\ &= 8.43 \rho_0(\xi) \frac{k \log e}{x} \left( \xi^3 - \frac{3}{2} \xi - \frac{1}{16.43} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (65)$$

從つてもを正負の $\infty$ とすれば上式の右邊は0となるが、之以外にも括弧内の3次式を0ならしめる様な實數根も必ず一つは存在するから、之に相當する $x$ に於て $W_A$ -曲線は鉛直切線との切點を持つことになる。今推定した $A_3$ の値と符號の如何により、この切點が $x > 0$ ,  $W_A > 1$ の所に存在すれば、茲に $W_A$ -曲線上 $W_A = 1$ の點に

圖-5.

例-2: 阿武隈川水系阿武隈川供中測水所 (順位 80)  
流況曲線圖 (昭和7年)  
(流域面積 2400 km<sup>2</sup>)



於て見掛けの下限を生ずる\*。即ち $W_A$ に從ふ時、最小流量は理論的には0となる筈であるが、上2例の場合は補正項の第2項以上の省略と $A_3$ の粗雑な推定とによつて期せずして標本に略略近い値を得たと言ふ結果になつたのである。圖-4及圖-5の $W_A$ -曲線は $Q_{30}$ 附近より右に於て、漸次觀測値の下方又は上方に外れて行き、 $Q_{355}$ に於ける喰違ひは、 $W_A$ による値の $\pm 14\%$ 程度にも達する。それで上記最小流量の非嚴密性がこの近く迄も影響を及ぼすならば、 $W_A$ により渴水量を推定する事は躊躇せねばならぬ。

第2次水力調査に於ては例-1で述べた平分線から圖上で豊, 平, 低, 渴水量を推定したが、之等には當然個人差が伴ふことになる。第3次水力調査では之を避ける爲に、各種流量に相應する日數附近で觀測點を結ぶ折線の中央を通つて畫いた曲線と、規定日數に於ける縦距線との交點によつて所定の流量を定める様にした。其の結果は流況表から直接求めたものと殆ど變りはない。例へば例-2に於て表-3中の4流量の内平水量が48.0 m<sup>3</sup>/sとなるだけで他は全然同じである。(前記『流量調査方法』第4圖表参照)

この様に流況表上の超過確率を其の儘用ひるな

\* 同様に見掛けの上限を生ずる場合もあると思ふ。

らば、何等の統計的操作も要しない。かと言つて統計結果が標本と著しく異つて居ればやはり不安であるが、この點 2 例共兩端を除いた  $Q_{50} \sim Q_{90}$  の大部分に於ける適合性は良好であり、且この 2 方法は其の理論的根據と相俟つて流量と繼續日數の關係を、特に式 (42) の如き簡然たる形を以て、圖表類を用ひた既往の表現法よりは統計的に結果を示し得るのである。

(c) 結 論

上の如く標本數が比較的多いのに拘らず、この中 3 個しか用ひなかつたことは再考を要する。即ち全標本から一義的に諸常數を定める式 (12) の  $W_A, W_S'$  及び程度迄は主觀的に諸常數を推定する  $W_S, W_K$  或は  $W_G$  を用ひれば、統計的健全性や観測値への適合性に於て更に良い結果を得るであらうが、積率の算出や面倒な試算を要するから實用的には面白くない。しかし一大水力地點の計畫を行ふ様な場合は、この手数は 1 年に就き 1 回で済むのであるから煩雜な計算も厭はないし、又綜合計畫の資料として比較する意圖が無ければ、其場限りの常數でも差支へを生じない譯である。又繼續日數を與へて之に相應する流量を求めめる場合には、上の諸方法に反して  $W_B$  は頗る便利であり、利用價値がある。

この様に使用目的に應じて種々の方法を用ひ、更に多くの例に就き比較検討してみない限り、僅か 2 例の結果を、しかも適合性のみから判断するのは早急であるとも言へるが、流況の推定に當つては、上例に徴して少くとも統計的方法が有効であり、又この系統の分布が妥當であることを識り得たのである。

10. 豊, 平, 低水量の記録のみを用ひる場合

(a) 遞信省の『流量要覽』に就て

豫め最も有効な方法を定め、之に基いて各年毎の記録に就き整理、算出した統計的資料や常數を一覽にして置けば、更に數ヶ年に亙る之等の値から統計的に最も健全なる流況を推定する事も可能であらう。然るに遞信省の『流量要覽』に於ける如き在來の表示法は、豊, 平, 低, 渦水量及最大, 最小, 平均流量のみを記載した數字の羅列に過ぎず、この儘では分散, 非對稱度及信頼度等も窺知し得ない。

併し乍ら最良の方法を定めるには嚴密な理論に基き、廣範圍且詳細なる研究に俟たねばならぬから、何人と雖も一朝一夕には自信を以て之を改善することは出来ぬであらう。其の時迄の暫定的措置として、又折角纏められた流量要覽を無駄としない爲にも、次の提案は意義を持つと思ふ。

(b) 理論的考察

問題は  $Q_{95}=x_3, Q_{85}=x_4, Q_{75}=x_5, Q_{55}=x_6$  及  $Q_{max}=x_{max}, Q_{min}=x_{min}, Q_{mean}=m(x)$  の 7 個の流量を與へ最も合理的に流況を推定するにあるが、この内  $x_{max}$  及  $x_{min}$  には信用が措けない。若し流況が其の儘で式 (8) の  $W_B$  に従ふならば、一般に聯立方程式 (66) が成立し、茲で  $x_p$  及  $x_q$  を  $x_3 \sim x_6$  の内で適當に選んだ 2 流量  $x_p$  及  $x_q$  に等しいと假定して解き、式 (67) の如く  $\lambda_0$  及  $k$  が定められる。

$$\xi_p = k (\log x_p - \log \lambda_0), \quad \xi_q = k (\log x_q - \log \lambda_0) \dots\dots\dots (66)$$

$$\log \lambda_0 = (\xi_q \log x_q - \xi_p \log x_p) / (\xi_p - \xi_q); \quad k = (\xi_p - \xi_q) / (\log x_p - \log x_q) \dots\dots\dots (67)$$

上式中の  $\xi_p$  及  $\xi_q$  は標本から拾つた  $x_p$  及  $x_q$  に対する超過確率と等しい  $W_B$  を數表で引いて逆に求めた値を用ひるのであつて、式 (28) 及 (33) は之等を  $\pm 1/\sqrt{2}$  とした特殊の場合に相當する。

しかし 8 に述べた如く  $W_E$  を直ちに用ひても到底満足すべき結果は得られないことは次の實例からもわかる。

例-1:  $x_3=1640$  個,  $x_5=650$  個;  $x_4=980$  個,  $x_6=450$  個の内  $x_3$  及  $x_5$  を式 (67) に用ひると,  $x_0=1045$  個,  $k=2.32828$ ,  $\therefore \sqrt{2}\xi=3.29268 (\log \chi - 3.01906)$  となり, 之から逆に  $x_4$  及  $x_6$  に對して  $W_E$  は 0.5365 (196日) 及 0.8858 (324日) となる。p, q の他の組合せをとつてもうまく行かない。

又式 (48) 及 (47) から, 三元の聯立方程式 (68) をてて,

$$\xi_i' = c_0' \log (x_i + b_0') + j = c_0' \{ \log (x_i + b_0') - \log (x_0 + b_0') \}, \quad (i=p, q, r) \dots \dots \dots (68)$$

上と同様に  $x_p, x_q, x_r$  の 3 流量を選んで,  $c_0', b_0', j$  (又は  $x_0$ ) を求めようとしたが, この儘では難しい。そこで,  $\log (x_i + b_0') = \log e \cdot \ln \{ 1 + (b_0' / x_i) \} + \log x_i$  に於て,  $b_0'$  が非常に小さければ,  $\ln \{ 1 + (b_0' / x_i) \} \doteq b_0' / x_i$  と置いて解き得るか, この近似にも無理がある。別に先づ  $x_0$  を式 (71) の如く推定すれば, 残りの  $c_0', b_0'$  は式 (68) の形の二元聯立方程式から求め得る筈であるが, 之も式 (67) の様に解くことは出来ない。又半圖式試算法は, 不安定すぎる結果には釣合のとれない手数を要するから考慮しない。元來與へられた標本は数が少く, 且その性質も限定されてゐるから, 式 (39), (52), (60) による積率は無意味であり, 式 (36), (38) の  $\alpha$  や  $v$  を求めることも不可能である。他方  $m(x)$  を利用する爲に式 (63) 及式 (77) の  $m(x)$  に等値してみたが, 之も駄目であつた。斯かる過程を経た後に, 著者は獨自の見解に基き次の着意を得たのである。

(c) 著者の提案する方法

1. 基本理論: 分布が式 (48) 及 (47) で表される場合,  $W_G$  軸上で  $x_0$  に關し左右對稱なる  $x_s, x_t$  を選び, 之に相當して  $\xi_s', \xi_t'$  とすれば式 (69) が成立するから, 之を解いて式 (70) を得る。

$$\left. \begin{aligned} \xi_s' &= -\xi_t', \quad \xi_s' = c_0' \log \{ (x_s + b_0') / (x_0 + b_0') \}, \\ \xi_t' &= c_0' \log \{ (x_t + b_0') / (x_0 + b_0') \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (69)$$

$$\left. \begin{aligned} (x_0 + b_0')^2 &= (x_s + b_0')(x_t + b_0') \\ \therefore b_0' &= (x_s x_t - x_0^2) / \{ 2x_0 - (x_s + x_t) \}, \\ c_0' &= 2\xi_s' / \{ \log (x_s + b_0') - \log (x_t + b_0') \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

茲で繼續曲線が確率變量  $x_0, x_s, x_t$  に相應する標本値  $x_0, x_s, x_t$  の 3 點を通るとすれば,  $x_0=x_0, x_s=x_s, x_t=x_t$  として先づ  $b_0'$  を求め, 更に  $c_0'$  を定めることが出来る。

2.  $x_0, x_s, x_t$  の推定及選擇: 一般に流況曲線は中央部より暫くの間は右に行く程緩傾斜となるが, この事は中央値と最頻値の順序からも理論的且經驗的に知られてゐる。

流況表上の低及平水量附近を觀察すると, 前の 2 例は共に  $Q_{182} \sim Q_{185}$  の間で, 又例-1 では  $Q_{239} \sim Q_{275}$ , 例-2 では  $Q_{274} \sim Q_{276}$  (34.1 m<sup>3</sup>/s) の間で, 流量は變化しない。(表-1 及 表-3 参照)

従つて先づ,  $x_0 = Q_{182.5}$  (又は  $Q_{183}$ )  $\doteq Q_{185} = x_4$  と假定する。又式 (69) を「度滿たす様な 2 標本は見當らないが, 幸に  $x_3$  と  $x_5$  が對稱に近いことを利用して  $x_s = x_3, x_t = Q_{270}$  (又は  $Q_{271}) = x_7$  を選び, 更に上の特質に基いて  $x_7 \doteq x_5$  として次式の近似を許すものとする。

$$x_0 \doteq x_4 \dots \dots \dots (71), \quad x_s = x_3; \quad x_t \doteq x_5 \dots \dots \dots (72)$$

3. 流況曲線の方程式  $W_I$ : 式 (71) 及 (72) を式 (70) に代入し, 之と式 (47) 及 (48) を用ひると流況は次の式で表される。

$$\left. \begin{aligned} W_I(x) &= W_E(\xi) = \frac{1}{2} \{1 - \Phi_0(\xi)\}; & \xi &= c_0' \log(x + b_0') + j; \\ j &= -c_0' \log(x_4 + b_0'); & b_0' &= (x_3 x_5 - x_4^2) / \{2x_4 - (x_3 + x_5)\}; \\ c_0' &= 2\xi_3' / \{\log(x_3 + b_0') - \log(x_5 + b_0')\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (73)$$

茲に  $\Phi_0(\xi)$  は式 (7) の形の  $\xi$  に就ての Gauss の誤差積分,  $x_3, x_4$  及  $x_5$  には夫々既知の豊, 平, 低水量を用ひ, 又  $\xi_3'$  は  $W_3 = 95/365 = 0.26027$  又は  $W_3 = 95/366 = 0.25956$  なることから逆に求めると次の値をとる。

$$\text{平年: } \sqrt{2}\xi_3' = 0.64248, \quad \text{閏年: } \sqrt{2}\xi_3' = 0.64466 \dots\dots\dots (74)$$

4. 最頻値  $hst(x)$ , 平均値  $m(x)$  及年發電能率  $\eta_I\%$ : 式 (73) に従ふ場合に, 之等は次の如く計算することが出来る。

$hst(x)$ ; 基本となる密度函數は式 (3) 及 (10) と同様に,

$$V_I(x + b_0') = \frac{c_0' \log e}{(x + b_0') \sqrt{\pi}} e^{-c_0'^2 \left(\log \frac{x + b_0'}{x_0 + b_0'}\right)^2} = \frac{1}{2} \varphi_0(\xi) \frac{d\xi}{d(x + b_0')} \dots\dots\dots (75)$$

之を  $(x + b_0')$  で微分して 0 と置けば, 式 (17) の關係を用ひて,  $\frac{1}{2} \varphi_0(\xi) \neq 0$  で割ることによつて,  $-H_1(\xi) \left\{ \frac{d\xi}{d(x + b_0')} \right\}^2 + \frac{d^2 \xi}{d(x + b_0')^2} = 0$  となり, 更に式 (73) の  $\xi$  を入れて  $-c_0' \log e / (x + b_0')^2 \neq 0$  とすれば,  $2c_0' \log e \{c_0' \log(x + b_0') + j\} + 1 = 0$  を得る。此の式を解けば  $(x + b_0')$  に就ての最頻値  $hst(x + b_0')$  が求められ, 且  $hst(x + b_0') = hst(x) + b_0'$  なることから次の如くなる。

$$hst(x) = C_4(x_4 + b_0') - b_0'; \quad \log C_4 = -1 / (2c_0'^2 \log e) = -2.30259 / (\sqrt{2}c_0')^2 \dots\dots\dots (76)$$

$m(x)$ ; 一般に,  $\int_0^{+\infty} (x + b_0') V_I(x + b_0') d(x + b_0') = m(x + b_0') = m(x) + b_0'$  として, 之から求める事も出来るが, 簡単に式 (63) に於て  $A_3 = 0$  とし,  $x$  及  $k$  の代りに夫々  $\log(x + b_0')$  及  $c_0'$  と置けば式 (77) の様になり, その計算の結果は與へられた  $m(x)$  と比較し得るわけである。

$$\left. \begin{aligned} m(x) &= C_5(x_4 + b_0') - b_0'; \\ \log C_5 &= 1 / (4c_0' \log e) = 1.15129 / (\sqrt{2}c_0')^2 = -\frac{1}{2} \log C_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (77)$$

$hst(x)$  と  $m(x)$  の關係; 式 (76) 及 (77) から次式が成立し, 兩者の内一方を知れば他方が求められる。

$$\{hst(x) + b_0'\} \{m(x) + b_0'\}^2 = (x_4 + b_0')^3 \dots\dots\dots (78)$$

$\eta_I\%$ ; 最大使用水量を  $x_a$ , 常時使用水量を  $x_b$  とする。

i. 渴水補給のない場合 ( $x_b = b_0$ )。式 (63) 及 (64) に於て  $A_3 = 0$  とし,  $x, k, \xi$  の代りに  $(x + b_0')$ ,  $c_0'$ ,  $\xi$  と置けば,

$$\eta_I = 100 [S_E(\xi_a' + c_0' \log C_4) \{m(x) + b_0'\} / (x_a + b_0') + W_I(x_a)]$$

之は  $-b_0'$  以上の部分に關する百分率であるから,  $x = 0$  以上を考へると式 (79) の結果が得られる。

$$\eta_I(x_a) = \frac{100}{x_a} [m(x) S_E(\xi_a' + c_0' \log C_4) + b_0' \{W_I(x_a) - W_E(\xi_a' + c_0' \log C_4)\}] + 100 W_I(x_a) \dots\dots\dots (79)$$

茲に  $W_I$  は式 (73) を,  $S_E$  及  $W_E$  は  $\xi$  の形を變へた式 (8) を用ひる。

ii. 渴水補給のある場合 ( $x_b > x_0$ )。上式により  $\eta_I(x_a)$  及  $\eta_I(x_b)$  を求めて置けば次式から計算出来る。

$$\eta_I(x_a, x_b) = \eta_I(x_a) + \{100 - \eta_I(x_b)\} x_b / x_a \dots\dots\dots (80)$$

(d) 計 算 例

例-1:  $x_3, x_4$  及  $x_5$  は、流量要覽の原資料となつてゐる意味から 表-5 の値を用ひ (表-1 參照)、式 (73) から

表-5. (例-1)

$x$	$W_0$ より求めた流量	超過確率 $W_I$	繼續日數	年發電能率 $\eta_I(x)$
$x_3$ , 豐水量	1640個	0.2596	95.0日	64.6%
$x_4$ , 平水量	980	0.5000	183.0	83.3
$x_5$ , 低水量	650	0.7405	271.0	94.6
$x_6$ , 渴水量	450	0.9346	342.1	99.4

$b_0', c_0'$  及  $j$  を計算して流況曲線の方程式を求めると、

$$\sqrt{2}b' = 2.14151 \log(x - 320) - 6.03808$$

之により  $W_I$  及繼續日數を計算すれば 表-5 の様になるが、 $x_3, x_4, x_5$  に対する結果は最初の假定より當然である。逆に繼續日數又は超過確率を與へて流量を出すには式 (73) を書換へた次式を用ひればよい。

$$\log(x + b_0') = (b'/c_0') + \log(x_4 + b_0') \dots \dots \dots (73)'$$

例へば  $W_I = 30/366, 185/366, 275/366, 355/366$  に後し  $\sqrt{2}b' = 1.39192, -0.01366, -0.67877, -1.88000$

等の値を上式に入れると對數表のみを用ひて表-6 の如き流量 (整数) が得られる。圖-4 に於て、 $W_I$ -曲線は之等の關係を示したもので、 $W_0$ -曲線と  $x_3 = x_3$  の點で交はる。又  $\eta_I(x)$ -、 $\eta_0$ -曲線は夫々式 (79) から求めた値 (表-5 參照) と  $W_0$ -曲線より プラメーターを用ひて畫いた原調査書第 20 圖の發電能率曲線とを示したものである。尙式 (76) 及 (77) によつて計算すると、 $hst(x) = 528$  個、 $m(x) = 1497$  個となつた。

表-6. (例-1)

超過確率 $W_I$	繼續日數	$x$	流 量
0.0820	30日	30日 流量, $x_3$	3268個
0.1587		$x_1$	2254
0.2596	95	豐水量, $x_3$	1640
0.5055	185	平水量, $x_4$	970
0.7514	275	低水量, $x_5$	638
0.8413		$x_2$	545
0.9699	355	渴水量, $x_6$	407
1.0000	366	最小流量	320

例-2:  $x_3 = 75.0 \text{ m}^3/\text{s}, x_4 = 48.0 \text{ m}^3/\text{s}, x_5 = 34.1 \text{ m}^3/\text{s}$  (表-3 及 9 (b) 參照) を用ひ上と同様に流況曲線式を求めると、 $\sqrt{2}b' = 2.23159 \log(x - 19.4) - 3.25002$  となり、表-6 に相應して表-7 (流量の有効數字は3桁迄とる) を得るから、之を圖示すれば圖-5 の  $W_I$ -曲線を生じ、又  $hst(x) = 29.3 \text{ m}^3/\text{s}, m(x) = 68.1 \text{ m}^3/\text{s}$  となる。

表-7. (例-2)

超過確率 $W_I$	繼續日數	$x$	流 量
0.0820	30日	30日 流量, $x_3$	140.0 $\text{m}^3/\text{s}$
0.1587		$x_1$	99.7
0.2596	95	豐水量, $x_3$	75.0
0.5055	185	平水量, $x_4$	47.6
0.7514	275	低水量, $x_5$	33.6
0.8413		$x_2$	29.6
0.9699	355	渴水量, $x_6$	23.5
1.0000	366	最小流量	19.4

10 數年間の資料に基く地方別代表河川の流況: 逓信省の『流量要覽』(昭和 8 年及 15 年) に基き、なるべく多年の記録を有し且我國發電水力上の 11 地方別の代表と思はれる諸河川を選び、著者の方法の適用を試みた結果は表-8 の通りである。

茲に  $x_{max}, x_3 \sim x_6$  及  $x_{min}$  には測定年間の記録を單に算術平均した値を用ひたが、10 (a) に述べた如くこの點に就ては統計的に検討の餘地がある。又 3 常數及  $x_3, x_4 \sim x_6$  は平年として、式 (74) の  $\sqrt{2}b'_0 = 0.64248$  と

$W_T = 30/365, 185/365, 275/365, 355/365$  に對する  $\sqrt{2}c'_i = +1.30945, -0.01720, -0.68532, -1.92052$  とを用ひて夫々式 (73) 及 (73)' から計算したもので、閏年のあることを無視してゐるが、結果に於て式 (71) 及 (72) の假定に基く偏りを幾分でも消す様になるのは面白い事實である。尙表中の流量 ( $m^3/s$ ) はすべて流域面積  $100 km^2$  當りの値であつて、この中  $m(x)$  は式 (77) により算出し、尙例-1 の 5 年間の資料に基く流況を例-1' として附記した。

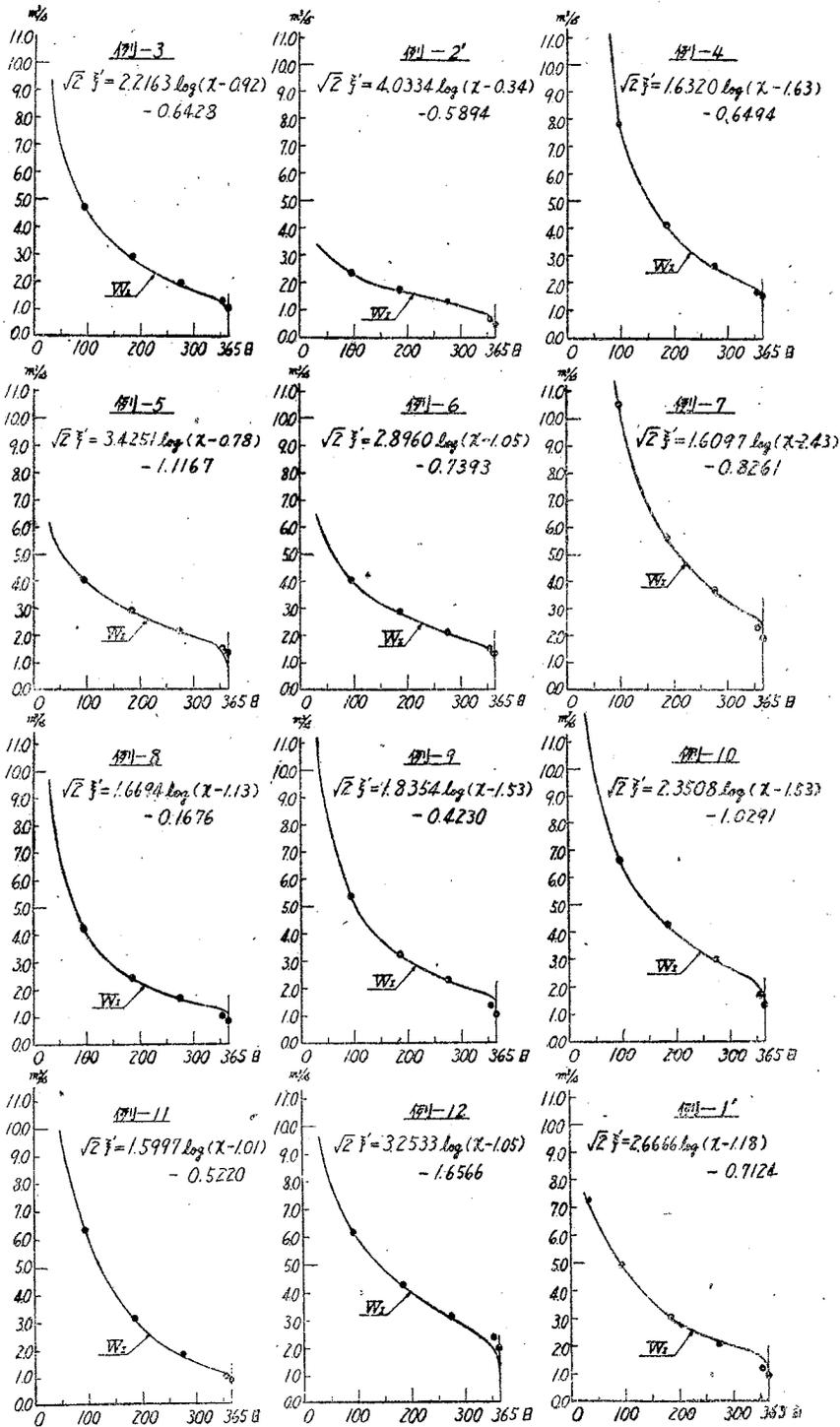
表-8. 地方別代表河川の流況

例	3	2'	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1'	
地方別	北海道	東北	奥羽	關東	東海	北陸	近畿	山陽	山陰	四國	九州		
水系名	尻別	阿武隈	雄物	利根	天龍	九頭龍	吉野	太田	天神	吉野	大淀	太田	
河川名	〃	〃	玉	〃	〃	〃	〃	〃	竹田	〃	〃	〃	
測水所名	喜茂別	供中	田澤	{市箱 城島}	佐久間	柿ヶ島	東阿田	大野	久原	大川持	{本八重 面早流}	鹿ノ巢	
順位	15	80	97	540	143	245	254	631	261	287	321	280	
流域面積( $km^2$ )	335.0	2400.0	345.0	{1230.0 1260.0}	4190.0	560.0	585.0	1100.0	88.1	1500.0	{1380.0 1480.0}	962.0	
測定年數*	15	16	18	16	19	16	19	14	18	17	19	5	
最大流量	$x_{max}$	33.80	31.40	79.70	42.90	60.70	161.00	163.00	112.00	47.70	634.0	81.70	69.90
30日流量	$x_8$	9.19	3.44	19.41	6.15	6.49	26.26	9.71	11.26	12.23	16.70	9.69	7.33
豐水量	$x_3 = x_8$	4.72	2.36	7.82	4.03	4.05	10.60	4.19	5.34	6.67	6.35	6.14	4.94
平水量	$x_4$ $X_4$	2.87 2.84	1.74 1.73	4.13 4.07	2.89 2.87	2.85 2.83	5.69 5.61	2.39 2.36	3.23 3.19	4.27 4.22	3.13 3.08	4.28 4.24	3.03* 3.00
低水量	$x_5$ $X_5$	1.92 1.88	1.31 1.29	2.64 2.58	2.15 2.11	2.13 2.09	3.73 3.65	1.65 1.62	2.29 2.25	2.99 2.93	1.85 1.80	3.10 3.04	2.09* 2.20
渴水量	$x_6$ $X_6$	1.31 1.19	0.69 0.81	1.69 1.80	1.52 1.36	1.53 1.44	2.32 2.64	1.02 1.22	1.39 1.68	1.70 1.95	1.05 1.14	2.35 1.88	1.17* 1.53
最小流量	$x_{min}$ $X_{min}$	1.05 0.92	0.51 0.34	1.59 1.63	1.38 0.78	1.38 1.05	1.95 2.43	0.84 1.13	1.04 1.53	1.36 1.53	0.88 1.01	1.94 1.05	0.92 1.18
年平均流量	$m(x)$ $m(x)$	4.53 4.27	2.54 1.99	6.96 8.39	3.72 3.42	4.10 3.52	10.30 11.50	4.47 4.39	5.71 5.26	5.85 5.96	11.00 6.98	6.15 5.20	4.93 3.87
常數	$b'_0 = -\chi_{min}$	-0.92	-0.34	-1.63	-0.78	-1.05	-2.43	-1.13	-1.53	-1.53	-1.01	-1.05	-1.18
	$\sqrt{2}c'_0$	2.2163	4.0334	1.6320	3.4251	2.8960	1.6097	1.6694	1.8354	2.3508	1.5997	3.2532	2.6666
	$C_0$	1.716	1.177	2.706	1.254	1.372	2.782	2.589	2.197	1.616	2.817	1.285	1.452

\* 測定年數は連続したものでない。又豐水量記録を一部缺くものもある。\* 第9節 (a), 例-1 に於けると同じ訂正を施した値である。

圖-6 は斯くして得た各河川の流況を表す  $W_T$  一曲线と與へられた豐, 平, 低, 渴及最小流量とを示したものである。

圖-6. 地方別代表河川の流況



(e) 結 論

上の結果を觀察するに、圖-4 に於て、左端部を除いた大部分、特に中央部にては、 $W_A$ -線よりも  $X_I$ -線の方が  $W_0$ -線に近い。圖-5 に於ても、兩端部は兎も角として、 $W_I$ -線は  $W_A$ -線よりも一層具合よく中央部の諸觀測點を平分する様である。又圖-6 の例-3, 4 及 11 に於ける  $W_I$ -線は與へられた諸點と殆ど一致し、他の例にも大きい喰違は認められない。

1.  $W_I$ に就て: 1年間の流況を取り扱つた例-1 及 2 に於て、適合性と言ふ見地からは上の如く式 (73) の  $W_I$  が式 (36) 及 (38) の  $W_A$  より劣るとは斷定し難く、茲に式 (71) 及 (72) の假定の妥當性が檢證されたことになる。

この様に標本数が多い時は、前述の如く先づ  $x_0$  を拾ひ任意の 1 組の  $x_1, x_2$  を選んで基本の式 (70) を用ひるか、之を數組に就き行つて得た  $b_0'$  や  $c_0'$  の平均値をとり<sup>20)</sup>、或は  $(X+b_0')$  座標に就ての數級展開を利用して式 (33) と同様に特定の標本値  $x_1$  及  $x_2$  を見出した上、

$$\left. \begin{aligned} b_0' &= (x_1x_2 - x_0^2) / \{2x_0 - (x_1 + x_2)\}; & x_0 &= \sqrt{(x_1 + b_0')(x_2 + b_0')} - b_0'; \\ c_0' &= \sqrt{2} / \{\log(x_1 + b_0') - \log(x_2 + b_0')\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(81)$$

として式 (36) 又は (38) と同様に進める等、更に適合度をよくし或は統計的に優れた方法が考へられる。之等の方法は式形は同じであつても  $W_G$  や  $W_S'$  より實用的であるが、この内でも前二者は、始めに常數さへ定めれば數表を引く手数が少く、特に超過確率から流量を逆算する時には  $W_A$  よりも便利である。

著者の本表の意圖は、流量要覽に記載された様な豐, 平, 低水量の多年に互る記録から諸河川の流況を統計的分布として迅速且合理的に表現せしめるに在り、この點圖-6 の諸例に徴して著者の方法の有効性を識る事が出來、延いては之に基く平均流量、年發電能率等の統計的推定値が適正なることを認め得る。

従來は流況を所謂流況曲線として把握し、標本その儘の諸點を通る様に小縮尺の圖上で畫くか、全體を 1 曲線と見做し、或は數本の曲線の連續として小區間毎に二次曲線の方程式を當嵌める\* 等適合性のみに意を注ぐ方法が用ひられた。之では重要な最大使用水量の決定に際し、特に豐水量以上に於ては相當の個人差を伴ひ、落差如何にもよるが出力に大きい影響を及ぼす。9 (b) に述べた如く第二次水力調査の諸流量の推定法を第三次で變へたのは、之をより規約化する爲であつた。著者の方法によれば、使用數表及計算桁數を規定さへして置くと、一定標準の下に任意流量と繼續日數との關係を表-8 の如く精密に求める事が出來る。又發電能率を式 (79), (80) から計算すれば、プララ=メーターによる手數と曖昧さを避け得る譯であり、特に式 (80) の場合は最小流量に於ける偏差は全然影響を及ぼさないのである。

2.  $x_0, b_0', c_0'$  に就て: 之等は共に頻度曲線の分散及非對稱度等の特性値に關係する常數であつて、理論的には  $c_0'$  が一定ならば  $x_0 + b_0'$  が小なる程、又後者が一定ならば前者が小なる程、夫々繼續曲線中央部の傾斜を緩又は急ならしめるが、共に非對稱性を増さしむるものである。\*\* この内  $x_0$  は  $x_4$  と假定したから、 $b_0', c_0'$  さへ求めると改めて曲線を畫く迄もなく、流況を統計的に明瞭に判定し得ることになる。表-8 に於て地方別に見ると  $x_4$  及  $-b_0'$  は概ね東部より西部の方が大きく、 $c_0'$  は山陰及九州を除き逆の傾向にあり而も凡そ流域面積に比例する様である。

或繼續日數に對する流量が過小又は過大視されてゐる場合に健全な理論及方法によつて之を修正するならば、勞せずして發電力を増し或は建設費を減じ得る。この様に河川の流況は特に水力計畫に於て精査を要するのであるが、問題の性質上統計的研究が首たる研究法となり、之は電力負荷、料金等幾多の問題を解決する鍵となるであらう。著者は水文條件や信頼度に就ても再檢討の上、如上の提案を水力以外の諸河川工計畫にも役立たしめる所存である。

\* 高畑正信; 『流況曲線の方程式』, 水力, 第3卷, 第3號。

\*\* 圖-6 及 表-8 の例-4 と例-7 及例-11 と例-5 を比較のこと

## 引用文献

## [A] Fechnersches Prinzip.

- 1) H. Grassberger ; "Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Wasserführung der Gewässer," Die Wasserwirtsch., 1932, Nr. 1-6.
- 2) H. Grassberger ; "Untersuchungen über die Hochwässer der Jangtsekiang," Die Wasserwirtsch., 1933, Nr. 6.
- 3) H. Grassberger ; "Der Aufbau der Böden," Die Wasserwirtsch., 1933, Nr. 17-19.
- 4) F. Schaffernak ; "Hydrographie," Wien, 1935, S. 315-318 u. 321-324.
- 5) H. Grassberger ; "Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Hochwasserfragen," Deutsche Wasserwirtsch., 1936, Nr. 9-10.
- 6) C. Jaeger ; "Zwei neue Beiträge zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Theorie der Gewässerkunde und des Geshiebetriebes," Wasserkr. u.-wirtsch., 1937, Heft 13/14.
- 7) C. Reindl ; "Zur Voraussage grösster Hochwässer," Wasserkr. u.-wirtsch., 1938, Heft 13/14.
- 8) F. Knapp ; "Zuschriften," Wasserkr. u.-wirtsch., 1938, Heft 13/14.
- 9) V. Felber ; "Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Berechnung von Regennlinien," Wasserkr. u.-wirtsch., 1939 Heft 1/2.
- 10) V. Felber ; "Neues Verfahren zur Berechnung der Hochwassermengen aus den Niederschlägen," Deutsche Wasserwirtsch., 1939, Nr. 2-3.

## [B] Loi de L'effet Proportionnel.

- 11) R. Gibrat ; "Sur l'ajustement mathématique des courbes de débits d'un cours d'eau," Comptes Rendus, H. d. S. de L'académie des Sciences, 1932, 1 Sem., Tome 194.
- 12) R. Gibrat ; "Sur l'ajustement mathématique des courbes de débits d'un cours d'eau," Revue Générale de l'Electricité, 1932, 14 Mai.
- 13) R. Gibrat ; "Aménagement hydroélectrique des cours d'eau," Revue Générale de l'Electricité, 1932, 15 et 22 Octobre.
- 14) W. Kummer ; "Die Auswertung unsymmetrischer Verteilungsreihen der Grosszahlforschung," Schweiz. Bauzeitung, 1933, Nr. 11.
- 15) H. Grassberger ; "Korrespondenz", Schweiz. Bauzeitung, 1933, Nr. 16.
- 16) R. Gibrat ; "Aménagement hydro-électrique des cours d'eau," Revue Général de l'Hydraulique, 1936, No. 11.
- 17) A. Coutagne ; "L'etude de statistique des débits de crue," Revue Général de l'Hydraulique, 1937, No. 18.
- 18) A. Coutagne ; "Comment caractériser la variabilité intrinsèque des précipitation," Revue Général de l'Hydraulique, 1937, No. 18.

## [C] Slade Method.

- 19) J. J. Slade ; "An asymmetric probability function," Trans. Amer. Soc. Civ. Eng., 1936, vol. 62.
- 20) Geol. Sur. Water-supply paper 771 ; "Floods in the United States," 1936, p. 45-58 a. 398-432.
- 21) B. F. Kimball ; "Probability-distribution-curve for flood-control studies," Trans. Amer. Geophys. Union, 1938, I, p. 460-483.

## [D] 他系統の文献

- 22) W. E. Fuller; "Flood flows," Trans. Amer. Soc. Civ. Eng., 1914, vol. 77.
- 23) H. A. Foster; "Theoretical frequency curves and their application to engineering problems," Trans. Amer. Soc. Civ. Eng., 1924, vol. 87.
- 24) D. L. Sokolowski; "Anwendung der Verteilungskurven auf dem Gebiete der Hydrologie," Wasserwirtsch. u. Technik, 1936, Heft 10-11, 12, 13-14 u. 18-19.
- 25) A. Hazen; "Flood flows," New York, 1930.
- 26) R. D. Goodrich; "Straight-line plotting of skew-frequency data", Trans. Amer. Soc. Civ. Eng., 1927, vol. 91.
- 27) F. Reinhold; "Einfache zeichnerische Darstellung von Dauerkurven," Die Wasserwirtsch., 1933, Nr. 13.

## [E] 著者の方法

- 28) 石原藤次郎, 岩井重久; 『降雨曲線の決定に關する一統計的方法』, 近く發表の豫定。

附記 本研究は著者が京大教授石原博士の御指導を仰ぎ, 日本學術振興會の援助の下に行つた「河水統制の理論的研究」の基本となり, 又文部省の科學研究費による發電關係の研究の一部をなすものである。かかる記述的統計の研究は煩雜なるに拘らず統計力學の如き華々しきはなく, 資料の蒐集にも困難を伴ふ。茲に石原博士及各方面の援助に謝意を表すると同時に, 諸賢の後援を乞ふ次第である。