

# 走行荷重による舗装版の振動に就て

准員 青 松 健 一 \*

About the Vibration of Pavement-Slab raised by Running Loads

by Kenichi Aomatsu, Assoc. Member.

**要 旨** 本文は舗装版を、荷重に比例する基礎反力により支持された無限に横がれる版と考へ、水平の等速度を有する走行荷重による振動を求め、衝撃の影響を明かにしたものである。最近特に重要視せられる飛行場滑走路舗装版の動力学的研究の一端として行つたもので、該方面研究の発展の一助ともなれば幸である。

## 目 次

- |                   |           |
|-------------------|-----------|
| 1. 緒 言            | 5. 衝撃の影響  |
| 2. 基本的諸關係         | 6. 静荷重の場合 |
| 3. 振動の積微分方程式と其の解法 | 7. 結 言    |
| 4. 解の級数による表示      |           |

## 1. 緒 言

本文はコンクリートの如き堅硬な舗装版の走行荷重による振動を、類似の問題たる軌條の振動の場合と同様の假定の下に計算したものである。かうした研究は軌條に就ては比較的よく行はれてゐるが、舗装版の場合は餘り見受られない様である。本文の結果が多少とも此の方面の研究に寄與する所があれば幸である。

著者は嘗つて Mohr の定理を應用し、構造力學に於ける撓み、捩屈及振動の問題の積分方程式による解法を、代表的な場合として單純梁に就て示し、この方法が其の儘版の場合にも應用さるべきことを述べた。<sup>1)</sup> 本文は斯かる 2 次元問題の一例として、其の積分方程式による解法を示したものである。又前文<sup>1)</sup>と異なり、振動の積微分方程式を解くに際し、或種強制振動の問題の解法として特に有力な方法とされてゐる演算子法を應用して見たが、此の場合にも矢張り有力なものであることを確めることが出来た。

本文にては先づ有限版が周邊を自由に支持された場合の解を求め、次に境界を無限に遠ざけた際のこの解の極限をとつて、求める無限版の解としたのである。

## 2. 基本的諸關係

### (1) H. Marcus の定理

一般に薄い版の撓み  $w$  は次の微分方程式を満足する。

$$\nabla^2 w = -M/N, \quad \nabla^2 M = -q$$

茲に、 $M = (M_x + M_y) / (1 + \nu)$ ,  $N = E/h^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$ ,

\* 元滿鐵鐵道技術研究所。

1) 青松健一：“構造力學に於ける積分方程式の應用に就て,” 土木學會論文集, 昭和 19 年 9 月號。

$M_x, M_y$ : 夫々  $x$  軸,  $y$  軸に垂直な面に於ける直應力による曲げモーメント,  
 $\nu$ : ポアソン比,  $E$ : 弾性係數,  
 $h$ : 版の厚さ,  $q$ : 分布荷重.

特に矩形版の場合に於ては, 上の2つの關係から直ちにわかる様に, 周邊にて  $w=0$  なる版の撓みは,  $M/N$  を分布荷重と見た時の周邊支持版のモーメント和  $M$  に等しくなる。之が Marcus の定理であつて, 單純梁の場合の Mohr の定理に相當するものである。

今兩邊が夫々  $x, y$  軸に平行で, 各頂點の坐標が  $(0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b)$  なる矩形版が, 周邊に於て自由に支持されてゐるものとする。斯かる版が 1 點  $(\xi, \eta)$  に單位荷重を受けた時の  $(x, y)$  點のモーメント和  $M$  を, 單純梁に於ける曲げモーメントの影響線に相應して  $K(x, y; \xi, \eta)$  とすれば, Marcus の定理は次の如く表すことが出来る。

$$w(x, y) = \int_0^a \int_0^b K(x, y; \xi, \eta) \frac{M(\xi, \eta)}{N} d\xi d\eta \dots\dots\dots (2.1)$$

特に分布荷重  $q(\xi', \eta')$  の場合は

$$M(\xi, \eta) = \int_0^a \int_0^b K(\xi, \eta; \xi', \eta') q(\xi', \eta') d\xi' d\eta'$$

となるから, 之を (2.1) 式に代入して,

$$\left. \begin{aligned} Nw(x, y) &= \int_0^a \int_0^b K_2(x, y; \xi', \eta') q(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ K_2(x, y; \xi', \eta') &= \int_0^a \int_0^b K(x, y; \xi, \eta) K(\xi, \eta; \xi', \eta') d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

但し

又  $(\xi, \eta)$  點に集中荷重  $Q$  の作用する場合には,

$$Nw(x, y) = QK_2(x, y; \xi, \eta) \dots\dots\dots (2.3)$$

(2) 固有値及固有函數

周邊自由支持の矩形版に就て考へるに, 其の撓みは前項の微分方程式を満足し, 周邊に於て  $M=0$  である。然るに其の第2式は表面張力 1 なる膜が分布荷重  $q$  を擔つてゐる場合の撓みの微分方程式と同形である。従つて前項の  $K$  は周邊にて變位が 0 で,  $(\xi, \eta)$  點に集中荷重 1 の作用する膜の撓みであつて, 之は矩形膜の場合の Green 函數に外ならない。而してこの  $K$  は簡單ではなく, 次の如くなることが知られてゐる。<sup>2)</sup>

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \Re \left\{ \log \frac{\sigma(z-\zeta, \omega_1, \omega_2) \sigma(z+\zeta, \omega_1, \omega_2)}{\sigma(z-\zeta, \omega_1, \omega_2) \sigma(z+\zeta, \omega_1, \omega_2)} \right\}$$

茲に,

$$\begin{aligned} z &= x+iy, \quad \zeta = \xi+i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi-i\eta, \quad \omega_1 = a, \quad \omega_2 = ib, \\ \sigma(z, \omega_1, \omega_2); \omega_1 \text{ 及 } \omega_2 \text{ を週期とする Weierstrass の } \sigma\text{-函數。} \end{aligned}$$

又  $K$  を積分方程式の核と見るとき, それに屬する固有値  $\lambda_{k,m}$  及固有函數  $\varphi_{k,m}(x, y)$  は次の如くなる。<sup>3)</sup>

$$\lambda_{k,m} = \pi^2(k^2/a^2 + m^2/b^2), \quad \varphi_{k,m} = (2/\sqrt{ab}) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (k, m = 1, 2, \dots) \dots\dots (2.4)$$

さて積分方程式論は多次元の場合も 1次元の場合と全く同様であるから, 以上の關係を適當に應用すれば, 單純梁

2) Courant-Hilbert; "Methoden der Mathematischen Physik," I, 1931, S. 335.  
 3) 前掲 2), S. 258.

の場合と同様にして、種々の問題を統一的に論ずることが出来る。例へば版の撓みは、重複核の展開定理を應用して、集中荷重の場合 (2.3) 式から、

$$w(x, y) = \frac{Q}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \varphi_{k,m}(\xi, \eta) \varphi_{k,m}(x, y) / \lambda_{k,m}^2 \}$$

$$= \frac{4Q}{\pi^2 ab N} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin \frac{k\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} / \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \right\}$$

之は周知の Navier の解である。分布荷重の場合も、(2.2) 式から展開定理を利用し容易に撓み  $w$  を求めることが出来る。

### 3. 振動の積微分方程式と其の解法

先づ邊長  $a, b$  なる有限版に於て、中央  $x=a/2$  の線に沿つて集中荷重  $Q$  が水平等速度  $v$  を以て進む時の振動を求め、其の解にて  $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$  の極限をとつて求める解としよう。

今基礎反力  $q$  を単位面積に就て  $q = -\alpha w$  とし、版の周縁は自由支持、 $t$  を時間とすれば、基礎反力及慣性抵抗を版に働く分布荷重と考へることにより、(2.2) 及 (2.3) 式から、

$$w(x, y, t) = \frac{Q}{N} K_2\left(x, y; \frac{a}{2}, vt\right) + \int_0^a \int_0^b K_2(x, y; \xi, \eta) \left\{ -\left( \frac{\alpha}{N} w + \frac{\rho}{N} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right\} d\xi d\eta \dots (3.1)$$

茲に  $\rho$  は版單位面積當りの質量である。此の積微分方程式を初期條件

$$t=0; \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}=0$$

の下に解くわけであるが、其のために (3.1) 式の兩邊に Laplace 變換<sup>4)</sup> を行ひ、上の初期條件を考慮すると、

$$W(x, y, p) = \frac{Q}{N} L K_2\left(x, y; \frac{a}{2}, vt\right) + \lambda \int_0^a \int_0^b K_2(x, y; \xi, \eta) W d\xi d\eta \dots (3.2)$$

茲に  $\lambda = -(\alpha/N + \rho p^2/N)$ ,  $W: w$  の Laplace 變換、

$$W(x, y, p) = L w(x, y, t) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} w(x, y, t) dt$$

(3.2) 式は Fredholm の積分方程式であつて、Schmidt の方法によつて解くことにする。先づ  $K_2$  は  $K$  の 2 重核であつて、其の固有値及固有函數は夫々 (2.4) 式の  $\lambda_{k,m}$  の 2 乗及  $\varphi_{k,m}$  である。又 (3.2) 式右邊第 1 項の固有函數系  $\varphi_{k,m}$  に関する Fourier 係數  $b_{k,m}$  は、

$$b_{k,m} = L \frac{\varphi_{k,m}\left(\frac{a}{2}, vt\right)}{\lambda_{k,m}^2} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{\sin k \frac{\pi}{2} \cdot L \sin \frac{m\pi vt}{b}}{\lambda_{k,m}^2} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{\lambda_{k,m}^2} \cdot \frac{\frac{m\pi v}{b} p}{p^2 + \left(\frac{m\pi v}{b}\right)^2}$$

茲で  $L \sin \frac{m\pi vt}{b}$  は、普通に現れる様な函數の Laplace 變換の表があるので、之から取られたものである。依つて (3.2) 式の解は次の様になる。

4) K. Wagner; "Operatorenrechnung," 1940, S. 50-69.

$$\begin{aligned}
 W(x, y, p) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{k,m} \frac{\lambda_{k,m}^2}{\lambda_{k,m}^2 - \lambda} \varphi_{k,m}(x, y) \\
 &= \frac{4Q}{abN} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(m\pi v/b)p}{\{p^2 + (m\pi v/b)^2\} \{\pi^4(k^2/a^2 + m^2/b^2)^2 + \kappa/N + \rho p^2/N\}} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}
 \end{aligned}$$

次に  $W(x, y, p)$  を  $w(x, y, t)$  に變換すると,

$$w(x, y, t) = L^{-1} W(x, y, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{W(x, y, p)}{p} e^{pt} dp$$

然るに Laplace 變換の表から,

$$L^{-1} \frac{(m\pi v/b)p}{\{p^2 + (m\pi v/b)^2\} \{\pi^4(k^2/a^2 + m^2/b^2)^2 + \kappa/N + \rho p^2/N\}} = \frac{\sin(m\pi vt/b) - \{(m\pi v/b)/\omega_{k,m}\} \sin \omega_{k,m} t}{\rho/N \{\omega_{k,m}^2 - (m\pi v/b)^2\}}$$

茲に,  $\omega_{k,m} = \{\kappa/\rho + (\pi^4 N/\rho)(k^2/a^2 + m^2/b^2)^2\}^{1/2}$

$$\therefore w(x, y, t) = \frac{4Q}{ab\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{2} \frac{\sin(m\pi vt/b) - \{(m\pi v/b)/\omega_{k,m}\} \sin \omega_{k,m} t}{\omega_{k,m}^2 - (m\pi v/b)^2} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \dots (3.3)$$

更に變數變換を行つて,  $x, y, vt$  の代りに夫々  $x+a/2, y+b/2, vt+b/2$  を代入し,  $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$  の極限をとると, 上の Fourier 級数は積分にて表される。同様の状況にある軌條の振動に關する K. Ludwig の解<sup>5)</sup> によれば, 減衰がなくとも自由振動が消失することを示してある。併し實際の場合には, 充分の時間が経過すれば, 自由振動は減衰してなくなるものであるから,  $b$  が充分大きく荷重  $Q$  が版の中心附近に來た場合, (3.3) 式第 2 項の自由振動は省略されるものと考えてよい。従つて,

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= \frac{4Q}{abN} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \sin(m\pi vt/b + m\pi/2)}{\kappa/N + \pi^4(k^2/a^2 + m^2/b^2)^2 - (m\pi v/b)^2 \rho/N} \sin\left(\frac{k\pi x}{a} + \frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{4Q}{abN} \left[ \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos(m\pi vt/b) \cos(m\pi y/b)}{\kappa/N + \pi^4(k^2/a^2 + m^2/b^2)^2 - (m\pi v/b)^2 \rho/N} \cos \frac{k\pi x}{a} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\sin(m\pi vt/b) \sin(m\pi y/b)}{\kappa/N + \pi^4(k^2/a^2 + m^2/b^2)^2 - (m\pi v/b)^2 \rho/N} \cos \frac{k\pi x}{a} \right]
 \end{aligned}$$

ここで  $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$  の極限をとり,

$$w(x, y, t) = \frac{Q}{\pi^2 N} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\alpha d\beta \frac{\cos \alpha x \cos \beta(y-vt)}{\kappa/N + (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \rho v^2 \beta^2/N} \dots (3.4)$$

従つて  $w$  は荷重の速度  $v$  を以て  $y$  方向に進む波動を表してゐる。波形は例へば  $t=0$  として次の積分から得られる。

$$w = \frac{Q}{\pi^2 N} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\alpha d\beta \frac{\cos \alpha x \cos \beta y}{\kappa/N + (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \rho v^2 \beta^2/N} \dots (3.5)$$

此の場合荷重は丁度座標の原點に位置してゐる。

5) K. Ludwig; "Die Verformung eines beiderseite unbegrenzten elastisch gebetteten Geleises durch Lasten mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit," 5th International Congress for Applied Mechanics, 1938, p. 650.

4. 解の級数による表示

(3.5) 式から撓みを計算するには、其の對稱性を利用するため  $(x, y)$  を極座標  $(r, \theta)$  に變換した方が便利である。先づ被積分函数は  $(\alpha, \beta)$  に就き偶函数であるから、

$$w = \frac{Q}{4\pi^2 N} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha d\beta \frac{\cos \alpha x \cos \beta y}{\kappa/N + (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \rho v^2 \beta^2 / N}$$

今  $\alpha, \beta$  の代りに極座標  $(\sqrt{\lambda}, u)$  を用ひ、 $\alpha = \sqrt{\lambda} \cos u$ ,  $\beta = \sqrt{\lambda} \sin u$  とし、 $\sin(x\sqrt{\lambda} \cos u) \sin(y\sqrt{\lambda} \sin u)$  が  $u$  に就き奇函数なることに注意すれば、

$$\begin{aligned} w &= \frac{Q}{4\pi^2 N} \int_0^\infty \sqrt{\lambda} d\sqrt{\lambda} \int_{-\pi}^{+\pi} du \frac{\cos(x\sqrt{\lambda} \cos u) \cos(y\sqrt{\lambda} \sin u)}{\kappa/N + \lambda^2 - (\rho v^2 / N) \lambda \sin^2 u} \\ &= \frac{Q}{8\pi^2 N} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\pi}^{+\pi} du \frac{\cos(x\sqrt{\lambda} \cos u + y\sqrt{\lambda} \sin u)}{\kappa/N + \lambda^2 - (\rho v^2 / N) \lambda \sin^2 u} \quad 6) \\ &= \frac{Q}{8\pi^2 N} \Re \int_0^\infty d\lambda \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-i(x\sqrt{\lambda} \cos u + y\sqrt{\lambda} \sin u)}}{\kappa/N + \lambda^2 - (\rho v^2 / N) \lambda \sin^2 u} \end{aligned}$$

此の式に Fourier 級数

$$\left. \begin{aligned} 1 / \left\{ \frac{\alpha^2}{N} + \lambda^2 - (\rho v^2 / N) \lambda \sin^2 u \right\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\lambda) e^{in u} \\ \text{但し } c_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in u} / \left\{ \kappa/N + \lambda^2 - (\rho v^2 / N) \lambda \sin^2 u \right\} du \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.1)$$

を代入すれば、

$$w = \frac{Q}{8\pi^2 N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Re \int_0^\infty d\lambda \cdot c_n(\lambda) \int_{-\pi}^{+\pi} du e^{in u} e^{-i(x\sqrt{\lambda} \cos u + y\sqrt{\lambda} \sin u)}$$

然るに、 $J_n$  を  $n$  次の Bessel 函数、 $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とすれば、

$$\begin{aligned} J_n(r\sqrt{\lambda}) e^{in\theta} &= \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inu} e^{ix\sqrt{\lambda} \cos u + iy\sqrt{\lambda} \sin u} du \\ &= \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{inu} e^{-i(x\sqrt{\lambda} \cos u + y\sqrt{\lambda} \sin u)} du \end{aligned}$$

依つて、

$$w = \frac{Q}{4\pi N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Re \left[ e^{-in(\pi/2 - \theta)} \int_0^\infty d\lambda c_n(\lambda) J_n(r\sqrt{\lambda}) \right]$$

(4.1) 式に於て、 $\sin nu$  が奇函数であるから、 $c_n(\lambda)$  が實数であることを考へると、

$$w = \frac{Q}{4\pi N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos n(\pi/2 - \theta) \int_0^\infty d\lambda c_n(\lambda) J_n(r\sqrt{\lambda})$$

然るに  $c_n = c_{-n}$ ,  $J_{-n} = (-1)^n J_n$  であるから、上式の級数で奇数の項は消失するはずである。従つて、

$$w = \frac{Q}{4\pi N} \left[ \int_0^\infty d\lambda c_0(\lambda) J_0(r\sqrt{\lambda}) + 2 \sum_{n=2,4,\dots}^\infty \cos n \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \int_0^\infty d\lambda c_n(\lambda) J_n(r\sqrt{\lambda}) \right] \quad \dots (4.2)$$

$$\text{但し } c_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [e^{-inu} / \{ \kappa/N + \lambda^2 - (\rho v^2/N) \lambda \sin^2 u \}] du$$

次に  $c_n(\lambda)$  を計算するために、 $\tan u/2 = z$  として変数変換をすれば、周知の如く、

$$\cos u = (1-z^2)/(1+z^2), \quad \sin u = 2z/(1+z^2), \quad du = 2dz/(1+z^2)$$

之等を代入して、

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-iz)^{2n} dz}{(1+z^2)^{n-1} \{ (\kappa/N + \lambda^2)(1+z^2)^2 - (\rho v^2/N) \lambda \cdot 4z^2 \}}$$

今  $iz = p$  とし、分母を因数に分解すれば、

$$c_n = \frac{1}{f^2 \pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(1-p)^{n+1} dp}{(p+1)^{n-1} (p^2 + 2p\sqrt{1-g^2/f^2} + 1)(p^2 - 2p\sqrt{1-g^2/f^2} + 1)}$$

茲に、 $f(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + \kappa/N}$ ,  $g(\lambda) = \sqrt{\rho\lambda/N} v$ ,  $0 < v\sqrt{4N\kappa/\rho^2} < 1$  とする。

斯くすれば  $f > g$  にして、上の被積分函数の因数はすべて實係数を有する。今圖-1. に示す如き積分路に沿ふ積分を考へるに、先づ半圓の周に沿ふ積分は極限に於て 0 である。又被積分函数は積分路の圍む領域内に次の如く 2 つの 1 次の極を持つてゐる。

$$p = \sqrt{1-g^2/f^2} \pm i g/f$$

従つてこの極に於ける留数を計算することにより、次の結果が得られる。

$$c_n(\lambda) = (-1)^{n/2} (f/g)^n (1 - \sqrt{1-g^2/f^2})^n / (f^2 \sqrt{1-g^2/f^2}) \quad \dots (4.2) a$$

但し  $f = \sqrt{\lambda^2 + \kappa/N}$ ,  $g = \sqrt{\rho\lambda/N} v$ ,  $0 < v\sqrt{4N\kappa/\rho^2} < 1$

斯くして得た  $c_n(\lambda)$  を (4.2) 式の級數に代入し、各項を計算しなければならないが、到底簡単に表せざらぬから、數値積分を行ふより外ないと考へられる。

## 5. 衝 撃 の 影 響

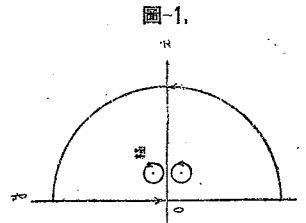
本文に於て取扱ふ様な動的の場合、靜的の場合に比して撓みなどが如何程増すか、即ち衝擊の影響を知ることは、飛行場滑走鋪装版の場合など實用上大切な問題である。今荷重點の撓み  $w_0$  を標準にとり、之を靜的の場合と比較しよう。  $r=0$  の場合、(4.2) 式にて  $J_0=1$ ,  $J_n=0$  ( $n=2, 4, \dots$ ) であるから、之と (4.2) a 式とから、 $\lambda=z$  と置くことにより、

$$w_0 = \frac{Q}{4\pi N} \int_0^\infty C_0(\lambda) d\lambda = \frac{Q}{4\pi N} \int_0^\infty dz / \sqrt{(z^2 + \kappa/N)(z^2 - 2\rho v^2/N + \kappa/N)}, \quad v < \sqrt{4N\kappa/\rho^2}$$

之は第一種楕圓積分であつて、周知の方法により次の如くして標準形に直すことが出来る。即ち先づ一次變換

$$z = \gamma(\zeta + i)/(\zeta - i), \quad \gamma = \sqrt{\kappa/N}$$

を行ひ、變数の對應に注意すれば、



$$w_0 = \frac{Q}{4\pi N} \frac{i}{\sqrt{\gamma(\gamma+\delta)}} \left\{ \int_{-i}^{-i\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + \int_{+i\infty}^{+i} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \right\}$$

茲に、 $\delta = \frac{1}{2} \rho v^2 / N, \quad k^2 = (\gamma - \delta) / (\gamma + \delta)$

此の積分を実積分で直すために、更に變換

$$\zeta = -is / \sqrt{1-s^2}$$

を行へば、

$$w_0 = \frac{Q}{4\pi N} \frac{1}{\sqrt{\gamma(\gamma+\delta)}} \left\{ \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-h^2s^2)}} + \int_{-1}^{-1/\sqrt{2}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-h^2s^2)}} \right\}, \quad h^2 = 1-k^2$$

ここで  $s = \sin \varphi$  と置き、少しく變形すると次の様になる。

$$w_0 = \frac{Q}{2\pi\sqrt{\kappa N} \sqrt{1+V^2}} \left( K - \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-h^2 \sin^2 \varphi}} \right) \quad (5.1)$$

但し  $h = \sqrt{2}V / \sqrt{1+V^2}, \quad V = v / \sqrt{4N\kappa/\rho^2} < 1,$

$K$ : 完全楕圓積分,  $K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-h^2 \sin^2 \varphi}}$

靜的の場合、即ち  $v=0$  の時は上式から直ちに\*

$$w_0 = \frac{1}{8} Q / \sqrt{\kappa N} \quad (5.2)$$

従つて動的の場合の標みと靜的の場合のそれとの比を  $j$  とすれば、

$$j = \frac{4}{\pi\sqrt{1+V^2}} \left( K - \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-h^2 \sin^2 \varphi}} \right) \quad (5.3)$$

圖-2 は (5.3) 式による計算結果を圖示したものである。一般に舗装版上を車が疾走する時、版の應力は急速に變化して相當の衝撃効果がある様に考へられるが、 $\sqrt{4\kappa N/\rho^2}$  は走行速度  $v$  に比し著しく大きい値になるので、圖より認められる如く衝撃の影響は餘り著しくないのである。

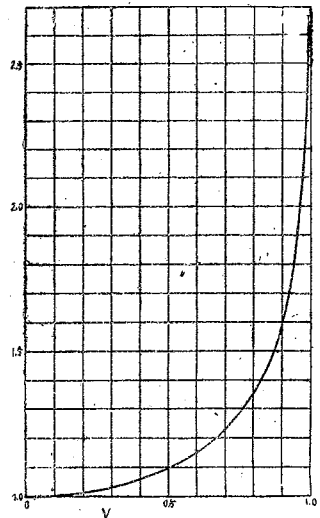
### 6. 靜荷重の場合

荷重が靜止してゐる場合の解は微分方程式により求められてゐるから、之と本文の方法による結果とを比較して見よう。今 (4.2) 式に於て  $v=0$  とすれば靜荷重の場合となる筈であるが、其の場合には、

$$c_0 = 1/(\lambda^2 + \kappa/N), \quad c_n = 0 \quad (n=2, 4, \dots)$$

$$\therefore w = \frac{Q}{4\pi N} \int_0^\infty d\lambda J_0(r\sqrt{\lambda}) / (\lambda^2 + \kappa/N)$$

圖-2.



\* (4.2) a 式は  $n=0$  の場合に限り  $v=0$  のときも成立する。

此の式にて  $\lambda = z^2$  と置くと,

$$w = \frac{Q}{2\pi N} \int_0^\infty \frac{J_0(rz) z dz}{z^4 + \kappa/N} = \frac{Q}{2\pi N} \Re \int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(rz) z dz}{z^4 + \kappa/N}$$

茲に  $H_0^{(1)}(z)$  は零次の第 1 Hankel 函数を表すものとする。今 圖-3 に示す曲線上の積分を考へるに、圓弧  $C_1$  及  $C_2$  上の積分は極限に於て 0 となるから、

$$\int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(rx) x dx}{x^4 + \kappa/N} + i \int_\infty^0 \frac{H_0^{(1)}(iy) iy dy}{y^4 + \kappa/N} = \int_{C_3} \frac{H_0^{(1)}(rz) z dz}{z^4 + \kappa/N}$$

所が  $iH_0^{(1)}(iy)$  は實數であるから、左邊の第 2 項は純虛數である。又右邊は  $z = \sqrt[4]{\kappa/N} \sqrt{i}$  に於ける留數の  $2\pi i$  倍であるから、

圖-3.

$$\Re \int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(rx) x dx}{x^4 + \kappa/N} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{\kappa}} \Re H_0^{(2)}\left(r \sqrt[4]{\frac{\kappa}{N}} \sqrt{i}\right)$$

然るに  $H_0^{(1)}(r \sqrt[4]{\kappa/N} \sqrt{i})$  は  $H_0^{(2)}(r \sqrt[4]{\kappa/N} \sqrt{-i})$  に共軛であるから、結局次の式が導かれる。

$$w = \frac{Q}{8\sqrt{\kappa N}} \left\{ H_0^{(1)}\left(r \sqrt[4]{\frac{\kappa}{N}} \sqrt{i}\right) + H_0^{(2)}\left(r \sqrt[4]{\frac{\kappa}{N}} \sqrt{-i}\right) \right\} \dots \dots \dots (6.1)$$

茲に  $H_0^{(2)}(z)$  は零次の第 2 Hankel 函数である。斯くして本文の方法によつて求めた靜荷重の場合に對する構みは、微分方程式による従來の結果<sup>7)</sup>と全く一致することがわかる。

7. 結言

本文は飛行機が飛行場の舗装路面上を滑走する如き場合、各點に於ける荷重の急變による舗装版の振動を求めたものである。路面の不齊、降着時の脚緩衝性能等による機體の鉛直加速度の影響又は揚力による滑走時の負荷の變化等の關係は本文の範圍外である。舗装版を無限に廣いと假定することは、著しい變形が荷重點附近に局限されることに基くものであるが、荷重が例へば伸縮目地附近に來た様な場合は明かに違つてくる筈である。更に基礎を構成する物質の慣性等が問題になる場合には、本文に於ける基礎反力に關する假定は成立しなくなる。斯くして滑走路舗装版の動力學的研究としては、更に考究すべき問題は極めて多く、本文はかうした方面の研究の一端に過ぎないが、本文が極めて重要視せられる該方面の研究發展の一助ともなれば幸である。

本文の解法にて級數を積分になほすこと、極限の順序變更等數學的に吟味を要する點が尠くないが、一般的に之等を許される條件を求めることは難しい。併し乍ら具體的の場合に斯くして得られた結果の正否を判斷することは、其の物理的意義を考へれば大抵の場合可能に思はれる。

終に、本研究は京大教授石原藤次郎博士の御示唆並に御激勵によるものであり御懇篤な校閲を受けたことを明記し、深く謝意を表する次第である。

(昭. 19, 12, 13. 受付)

7) F. Schleicher ; "Kreisplatten auf elastischer Unterlage," 1926.