

SPH (2) による境界適合型粒子法の高精度化

九州大学 学生会員 ○藤岡 秀二郎
 東北大学 正会員 辻 勲平
 筑波大学 正会員 三目 直登
 九州大学 正会員 浅井 光輝

1. 緒言

SPH, MPS などの粒子法では, 一般的に着目粒子から近傍粒子までの距離に応じた固定したカーネル関数(重み関数の一種)を使った内挿近似を行うため, 粒子配置が乱れた場合, 計算精度が担保されない. この課題に対し本研究グループでは Taylor 展開の 2 次の項までを満足する 2 階微分モデル(以下, SPH (2) と略記)を提案し, 複数の例題を通して, 既往の SPH モデルに比べて収束性と安定性に優れていることを確認してきた¹⁾.

本研究では, 壁面境界適合型の座標変換を SPH (2) で実行し, 混合微分を含む 2 階微分モデルの優位性を従来の SPH 法との比較を通して示す. また, 壁面勾配を有する問題を, 水平な壁面モデルのまま解析できる本手法の有効性を実験結果と比較し検証する.

2. 座標変換の概要

本研究では松本らが提案した底面境界適合型 MPS 法²⁾と同様の座標変換を用いて検証を行った. 本手法では, 解析領域内においてヤコビアンが一定となるような座標変換を用いることで, 各粒子が保持する体積の変化を防止しながら, 境界の扱いを単純にした.

図-1 の破線で示す x 軸に平行な基準面からの底面境界の高さを $h(x)$ としたとき, 座標変換は以下のように定義される.

$$\xi = x \quad (1)$$

$$\zeta = y - h(x) \quad (2)$$

この座標変換のヤコビ行列 J は以下のように表される.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{dh}{dx} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで正規座標系の勾配作用素を

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

と表すとき, 実空間での勾配, ラプラシアンはヤコビ行

列 J を用いてそれぞれ以下の式で表される.

$$\nabla \phi = J \tilde{\nabla} \phi \quad (5)$$

$$\nabla^2 \phi = J \tilde{\nabla} \cdot J \tilde{\nabla} \phi = c_{\text{trans}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \phi \quad (6)$$

$$c_{\text{trans}} := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d^2 h}{dx^2} & 1 & -2\frac{dh}{dx} & 1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \zeta} & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} & \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

以上の微分作用素を用い, $\xi - \zeta$ 座標系における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を表すと次のようになる.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} J \tilde{\nabla} p + \nu c_{\text{trans}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (9)$$

ここで $\mathbf{u}, \rho, p, \nu, \mathbf{g}$ はそれぞれ流体の流速, 密度, 圧力, 動粘性係数, 重力加速度である. $\xi - \zeta$ 座標系において式(5),(6)で示した勾配とラプラシアンを評価することで $x - y$ 座標系における流体の運動を解くことが可能となる.

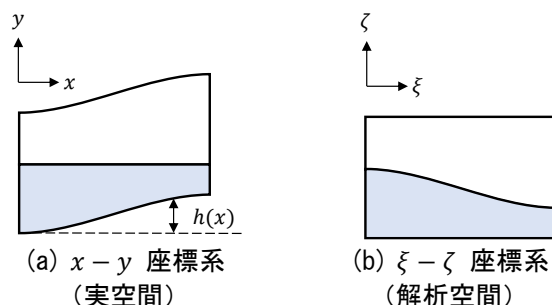


図-1. 座標変換の概念図

3. 離散近似モデル

前章で示したように, 座標変換を用いる際には 1 階微分と 2 階微分をそれぞれ評価できる離散近似モデルが必要となる. 本研究では SPH 法で広く用いられる 1 次精度の修正勾配モデルと, 本研究グループが提案した Taylor 展開の 2 次の項までを満足する 2 階微分モデルを用いた.

勾配モデルは以下の式で表される.

$$\langle \nabla \phi \rangle_i := \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \phi_{ij} \tilde{\nabla} w_{ij} \quad (\tilde{\nabla} w_{ij} := L_i \nabla w_{ij}) \quad (10)$$

$$L_i := \left[\bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} V_j (\nabla w_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}) \right]^{-1} \quad (11)$$

キーワード 粒子法, SPH 法, ラプラシアン, 座標変換

連絡先 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 九州大学 構造解析学研究室 TEL: 092-802-3370

V_j は j 粒子の代表体積, ϕ_i は i 粒子の物理量($\phi_{ij} = \phi_j - \phi_i$), w_{ij} は j 粒子の i 粒子に対する重み, $\mathbf{r}_i$ は i 粒子の位置ベクトル($\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$)を示す.

また2階微分モデルは以下の式で表される.

$$\left[\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\rangle_i \quad \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\rangle_i \quad 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right\rangle_i \right]^T := 2[\mathbf{M}_i]^{-1} \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} V_j F_{ij} [\mathbf{q}_{ij}] (\phi_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i) \quad (12)$$

$$[\mathbf{M}_i] := \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} V_j F_{ij} [\mathbf{q}_{ij}] [\mathbf{p}_{ij}]^T \quad (13)$$

$$F_{ij} := \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^4} \quad (14)$$

$$[\mathbf{q}_i] := [x_{ij}^2 \quad y_{ij}^2 \quad x_{ij} y_{ij}]^T \quad (15)$$

$$[\mathbf{p}_i] := [A(x, x) \quad A(y, y) \quad A(x, y)]^T \quad (16)$$

$$A(a, b) := a_{ij} b_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \bigcup_{k \in \mathbb{S}_i} V_k a_{ik} b_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \quad (17)$$

4. 三角形障害物を有する水柱崩壊問題での検証

4. 1. 解析手法・モデル

本研究では, 解析手法として非圧縮性流体を対象とした半陰解法型の安定化 ISPH 法³⁾を採用した. また, 本検証では, 負圧による過度な粒子凝集を防ぐため, 粒子配置を規則的な状態へと近づける PS (Particle Shifting) 法を導入している. 解析モデルは三角形障害物を有する水柱崩壊問題(図-2)を対象とし, 実験⁴⁾と2階微分モデルとして Español and Reveng (2003)のモデル, 圧力勾配モデルとして数値安定性に優れた和モデルを用いた従来法との比較により本手法の妥当性を確認する.

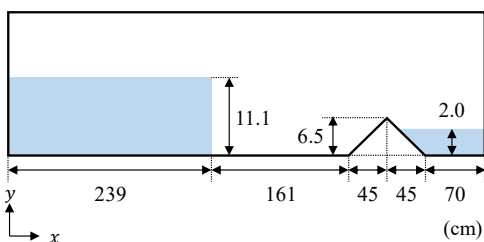


図-2. 水柱崩壊問題の概念図

4. 2. 解析結果

解析結果を図-3, 図-4に示す. 図-3より1.8s頃に三角形障害物を越流し, 3.0sから7.0sほどの間に下流側の壁で波が2回反射し上流側に戻っていく実験と同様の結果が得られた. さらに, 上流側の壁から393.5cm地点の水深の時間遷移(図-4)を実験値と比較すると, 従来法においては波が減衰しているのに対し, 提案法では波の伝播に遅れが生じているものの減衰は生じず, 特に実験値で観測されるソリトン分裂に伴う波の分散性を概ね再現できる結果が得られた.

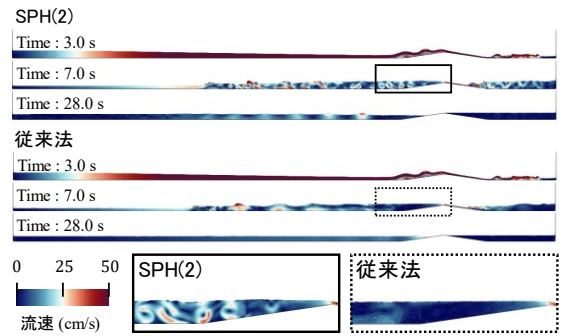


図-3. 波の時間遷移(壁面境界適合型 SPH (2))

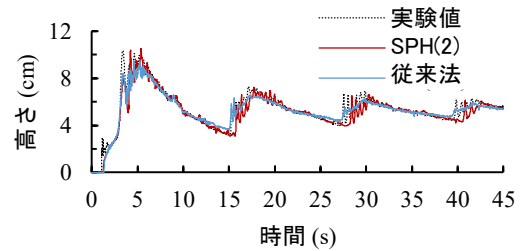


図-4. 水面位置の時間遷移($x = 393.5$ cm)

5. 結言

本研究では, 壁面境界適合型の座標変換を高精度な SPH (2)で実施する新たな手法を提案した. 三角形障害物を有する水柱崩壊問題の解析を通して, 高効率かつ高精度な解析が可能であることを示した. 今後, さらに水深方向に座標を歪ませる σ 座標などの座標変換を施すことで, 計算精度を保ちつつ, 計算コスト減らすことができる可能性を秘めている. 提案手法はそのための第一段階であり, 高精度な2階微分モデルである SPH (2)により達成できた成果である.

参考文献

- 1) 藤岡秀二郎, 辻勲平, 浅井光輝: 高精度 SPH 法 ～空間2次精度の勾配・ラプラシアン・混合微分～, 土木学会論文集, Vol. 79, No. 15, 22-15019, 2023.
- 2) 松本久也, 井元佑介, 浅井光輝, 三目直登: 底面境界適合型 MPS 法の開発, 日本計算工学会論文集, No. 20210017, 2021.
- 3) M. Asai, A. M. Aly, Y. Sonoda and Y. Sakai: A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition, *J. Appl. Math.*, Vol. 2012, Article ID 139583, 2012.
- 4) S. Soares-Frazão: Experiments of dam-break wave over a triangular bottom sill, *J. Hydraul. Res.*, Vol. 45, pp. 19-26, 2007.