

# 水際線の移動を有する浅水長波流れを対象とした 高精度かつ安定な DG 有限要素法の開発

九州大学 学生会員 ○松本 礼央  
広島工業大学 正会員 田中 聖三  
九州大学 正会員 浅井 光輝

## 1. 緒言

河川の氾濫や高潮などの数値解析には、浅水長波方程式が広く用いられている。浅水長波方程式は双曲型の偏微分方程式であり、不連続な解を有することによる数値不安定性が生じるため、空間の離散化に CG (continuous Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法が多く用いられてきた。しかし、CG 法では、人工粘性による解のなまりや、質量保存などの保存則を厳密に満足できないなどの問題点がある。そこで、保存性を満足できる有限体積法の良さをもち併せる DG (discontinuous Galerkin) 法が浅水長波方程式の高精度な数値解析手法として期待されている。DG 法は、浅水長波方程式などの不連続な解を有しやすい双曲型方程式の解析に対して有効であり、要素境界での Flux の収支を考慮して解析を行うため、局所的な保存性を満足できるという性質を持つ。本研究では、浅水長波方程式の高精度かつ高効率な数値解析手法の構築を目的とし、浅水長波方程式の空間離散化に DG 法を適用した。また、移動境界手法を導入することで、水際線の移動を有する浅水長波流れ解析を可能にした。数値解析例としてダムブレイク問題と段波問題を取り上げ、厳密解および CG 法との数値解析結果の比較により、DG 法の有用性について検討を行った。

## 2. 数値解析手法

### 2.1. 支配方程式

支配方程式には、以下に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{R} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は保存変数、 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ は流束関数、 $\mathbf{R}$ はソース項であり、以下のように定義される。

$$\mathbf{U} = [h, \quad uh, \quad vh]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\mathbf{F}_1(\mathbf{U}), \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{U})]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{U}) = \left[ uh \quad u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \quad uvh \right]^T,$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{U}) = \left[ vh \quad uvh \quad v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \right]^T$$

$$\mathbf{R} = \left[ 0 \quad -gh \frac{\partial z}{\partial x} \quad -gh \frac{\partial z}{\partial y} \right]^T \quad (4)$$

ここで、 $h$ は水深、 $u$ および $v$ は $x$ 、 $y$ 軸方向の断面平均流速、 $g$ は重力加速度であり、 $z$ は基準面からの高さである。

### 2.2. DG 法による離散化

式(1)に対し、各内部要素の集合を $\tilde{\Omega}$ 、その要素境界の集合を $\Gamma_{\text{int}}$ とし、空間方向の離散化として DG 法を適用すると、以下に示す弱形式が得られる。

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \mathbf{W} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{int}}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{R} d\Omega = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{W}$ は要素ごとに定義される不連続な重み関数、 $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$ は $\Gamma$ の外向き単位法線ベクトルである。なお、時間方向の離散化には3次精度の Runge-Kutta 法を用いた。

### 2.3. 数値フラックス

DG 法では要素境界で物理フラックスを複数有するため、数値フラックスを用いて近似を行う。式(5)左辺第3項のフラックスと外向き単位法線ベクトルの内積を数値フラックスに置き換え、本研究では、以下に示す Local Lax-Freidrich Flux<sup>1)</sup>を用いる。

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}^+) + \mathbf{F}(\mathbf{U}^-)] - \frac{a_{\max}}{2} (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-) \quad (6)$$

ここで、 $a_{\max}$ は流速と波速の絶対値の和とした。また、 $\mathbf{U}^+$ 、 $\mathbf{U}^-$ は、要素境界における値であり、要素境界であらかじめ設定された法線ベクトルの方向の値を $\mathbf{U}^+$ とし、もう一方の値を $\mathbf{U}^-$ と定義する。

キーワード 有限要素法、浅水長波方程式、不連続ガラーキン法、移動境界手法

連絡先 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 九州大学 構造解析学研究室 TEL: 092-802-3370

## 2.4. 移動境界手法<sup>2)</sup>

陸域での洪水氾濫を解く場合、移動する水際境界を考慮する必要がある。本研究では、あらかじめ広域にわたりメッシュ分割を行い、その中で水深の有無を判定しながら水流域を決めていく手法を用いる。本手法では、設定した微小水深と、浅水長波方程式を解き、得られた水深の大小から陸水判定を行う。要素内の平均水深が微小水深以下となった場合、その要素は陸域とする。水域の要素については3節点全ての水深を微小水深以上にすることにより、水際線の移動を滑らかに実現する。

## 3. 数値解析例

本手法の有効性について検討するために、数値解析例としてダムブレイク問題、段波問題を取り上げ、厳密解およびCG法による数値解析結果との比較を行う。なお、CG法の空間方向の離散化にはSUPG法による安定化有限要素法、時間方向の離散化にはCrank-Nicolson法を用い、要素としてはDG法、CG法ともに三角形1次要素を用いた。

### 3.1. ダムブレイク問題での検証

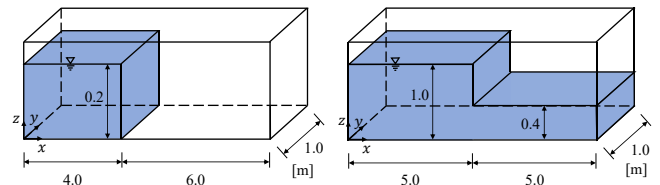
解析モデルを図-1(a)に示す。 $x$ 、 $y$ 方向分割幅はそれぞれ0.1[m]、0.5[m]とし、時間増分は $1.0 \times 10^{-4}$  [s]、DG法の微小水深は $2.0 \times 10^{-4}$  [m]、CG法の微小水深は $5.0 \times 10^{-3}$  [m]とした。図-2に、2秒後の水面形状、流速分布を示す。図-2よりCG法と比較してDG法による結果は、水の到達域をより正しく評価でき、水面形状、流速分布ともに厳密解とよい一致を示した。

### 3.2. 段波問題での検証

解析モデルを図-1(b)に示す。 $x$ 、 $y$ 方向分割幅はそれぞれ0.1[m]、0.5[m]とし、時間増分は $1.0 \times 10^{-4}$  [s]とした。解析結果として、図-3は1秒後の水面形状、流速分布について示したものである。図より、CG法と比較してDG法による結果は、厳密解とよい一致を示しているものの、不連続面においてオーバーシュート、アンダーシュートが発生していた。

## 4. 結言

本研究では、浅水長波方程式の高精度かつ高効率な数値解析手法の構築として、空間方向の離散化にDG法を用い、有用性の検証のため、ダムブレイク問題、段波問題による検証を行い、厳密解および従来のCG法との



(a) ダムブレイク問題 (b) 段波問題  
図-1 解析モデル

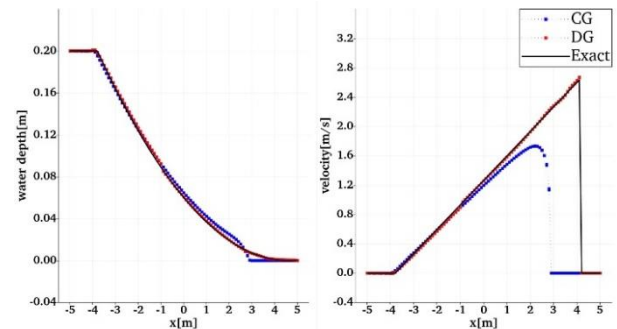


図-2 2秒後の水面形状（左）と流速分布（右）

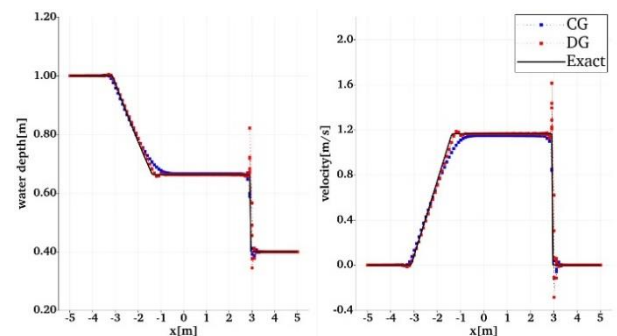


図-3 1秒後の水面形状（左）と流速分布（右）

数値解析結果の比較を行った。検証より、浅水長波流れ解析において、保存性に優れるDG法の有用性が確認できた。しかしながら、不連続面での数値振動抑制は避けられておらず、今後はより適切なLimiter処理が必要であろう。さらに、DG法の利点である局所的な高精度化（直交基底高次補間要素）を適用することでより高速かつ高精度なソルバーへと発展させる計画である。

## 参考文献

- 1) Nouh Izem, Mohammed Seaid, Imad Elmahi, and Mohamed Wakrim: Discontinuous Galerkin method for two-dimensional bilayer shallow water equations, *J. Eng. Math.*, Vol. 96, No. 1, pp. 1-21, 2016.
- 2) S.Bunya, E.J.Kubatko, J.J.Westerink and C.Dawson: A wetting and drying treatment for the Runge-Kutta discontinuous Galerkin solution to the shallow water equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 198, pp. 1548-1562, 2009.