

金属材料の降伏強度および有限変形座屈を考慮したトポロジー最適化

名古屋大学 学生会員 ○井本 桂輔
 名古屋大学 正会員 干場 大也
 名古屋大学 正会員 西口 浩司
 本田技術研究所 非会員 魚住 久雄
 名古屋大学 正会員 加藤 準治

1. はじめに

水鳥ら [1] の先行研究により、剛性制約付き座屈荷重最大化問題を解くことで、非線形座屈を考慮して構造強度を向上する最適化法が提案されている。しかし、金属材料を用いる場合、一定の座屈強度を持つ最適構造は座屈より先に局所的な弾塑性変形によって強度低下を起こすため、非線形座屈だけでなくいかに材料非線形性を考慮するのが課題となっている。そこで本研究では、材料降伏の回避を目的として、先行研究の最適化問題に幾何学的非線形性を考慮した応力制約を加え、剛性、座屈荷重、応力の最大値を同時に制御するトポロジー最適化法を構築した。

2. 非線形座屈解析

現在の変形状態から予測される座屈点での荷重係数である座屈荷重係数 $\gamma_j^{c,n}$ を、 λ_j^n と荷重係数 γ^n を用いて次のように表す。()ⁿ は n 番目の荷重ステップにおける値を表す。

$$\gamma_j^{c,n} = \lambda_j^n \gamma^n \quad (1)$$

座屈点において接線剛性行列 $\mathbf{K}_T$ は非正則になるため、座屈点における接線剛性行列について次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}^{c,n}, \gamma_j^{c,n}) \phi_j^n = 0 \quad (2)$$

非線形座屈解析において、接線剛性行列は線形剛性行列 $\mathbf{K}_L$ と、変位に依存する変位剛性 $\mathbf{K}_D$ および幾何剛性 $\mathbf{K}_G$ の3つの項に分離できる。したがって非線形座屈解析における解くべき関係式として、以下の固有値問題を得る。

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_D^n + \lambda_j^n \mathbf{K}_G^n) \phi_j^n = 0 \quad (3)$$

3. 剛性制約について

本研究では最適化の際の制約条件として、得られる構造の剛性の最大値に制約をかける剛性制約条件を適用する。

作用する外力ベクトル $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ と最終荷重ステップ時での力の釣り合い点における節点変位ベクトル $\mathbf{u}^{\text{end}}$ の内積、つまりエンドコンプライアンスに対して制約をかけることとす

る。変位制御法を前提に、エンドコンプライアンスの制約条件式を次式で定義する。

$$g_b = \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \mathbf{u}^{\text{end}} \geq \underline{c} \quad (4)$$

なお、剛性制約値 $\underline{c}$ は許容するコンプライアンスの最小値であり、同様の解析条件にて剛性最大化を行った際に得られる最適化結果のコンプライアンスを基準とし、剛性緩和率 α を導入することで以下のように定める。

$$\underline{c} = (\text{剛性最大化結果のコンプライアンス}) \times \alpha \quad (5)$$

4. 応力制約について

第2ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル $\mathbf{S}$ のベクトル形式およびフォン・ミーゼス相当応力（以降、ミーゼス応力と呼称する）を以下のように定義する。

$$\mathbf{S} = (S_{11} \ S_{22} \ S_{12})^T \quad (6)$$

$$S_{\text{VM}} = \sqrt{\mathbf{S}^T \mathbf{V} \mathbf{S}} \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{V}$ は偏差成分を取り出すための射影テンソルである。

また、特異点問題を回避するために Bruggi[2] が提案した、 qp 法を用いる。要素応力の緩和は以下のようにして行う。

$$S_e = \bar{\rho}^q S_{\text{VM},e} \quad (8)$$

ここで、 S_e は緩和応力、 $\bar{\rho}$ は要素の物理密度、 q は緩和パラメータ、 e は有限要素の番号、 $S_{\text{VM},e}$ は式(7)で示した要素のミーゼス応力である。

また、p-ノルムの考え方をを用いて、ミーゼス応力をまとめて最大値を取り出す。

$$S_{\text{pn}} = \left(\sum_e S_e^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

キーワード トポロジー最適化、座屈、応力制約、非線形

連絡先 〒464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町 E-mail: imoto.keiuske.c4@s.mail.nagoya-u.ac.jp

ここで、 p は p-ノルムのパラメータである。

本研究では、応力制約は最終荷重ステップ時でのミーゼス応力の p-ノルム関数である S_{pn}^{end} に制約をかけるものとする。したがって、応力制約条件式は次の通りである。

$$g_s = \max_{e=1,2,\dots,n} (S_e^{end}) \approx S_{pn}^{end} \leq \bar{S}_{vM} \tag{10}$$

ここで、 $\bar{S}_{vM}$ はミーゼス応力の上限值、 n は有限要素の個数である。

5. 剛性制約および応力制約付き非線形座屈荷重最大化問題

本研究では、座屈点での座屈荷重を目的関数とするのではなく、最終荷重ステップ時での釣り合い点における座屈荷重係数 λ_j^{end} を目的関数とした最適化を行う。これは最終ステップでの最小次の座屈荷重係数を向上させることで座屈経路を全体的に持ち上げ、平均的な座屈経路の改善を目的とするものである。

この最適化における目的関数と制約条件を以下に示す。

minimize:

$f = -\min |\lambda_j^{end}|$

(11)

subject to:

$h = V \leq V_0$

(12)

$g_b = \mathbf{f}_{ext}^T \mathbf{u}^{end} \geq \underline{c}$

(13)

$g_s = S_{pn}^{end} \leq \bar{S}_{vM}$

(14)

$\mathbf{R} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} = \mathbf{0}$

(15)

制約条件 h は材料体積制約を表し、式 (15) は任意の荷重に対して決まる釣り合い方程式を表し、 $\mathbf{R}$ は残差力ベクトル、 $\mathbf{f}_{ext}$ は外力ベクトル、 $\mathbf{f}_{int}$ は内力ベクトルである。

6. 最適化計算例

最適化計算例に用いる解析モデルには 4 節点四角形要素を用い、平面応力状態を仮定した。設計領域および境界条件は図-1 に示すような L 型ブラケットとし、要素数は 6400 要素とした。材料物性はヤング率 75.3GPa、ポアソン比を 0.3 とした。

図-1 は (a) 剛性最大化によって得られた最適化結果の平均コンプライアンス値をもとに剛性緩和率 $\alpha = 90\%$ として剛性制約 $\underline{c} = 3918.5$ を課して非線形座屈荷重最大化を行った結果、図-2 は (b) 剛性制約付き非線形座屈荷重最大化で得られた最適化結果のミーゼス応力の最大値の 90% である 1100MPa で応力制約を課した剛性・応力制約付き非線形座屈荷重最大化を行った結果である。また、各最適化結果のエンドコンプライアンス値、座屈荷重、ミーゼス応力の最大値を表-1 に示す。

7. 結論

- 先行研究の剛性制約付き座屈荷重最大化問題を基本に、材料降伏の回避を目的として応力制約を加え、剛性、座

屈荷重、応力の最大値を同時に制御するようなトポロジー最適化手法を構築した。座屈解析については、線形座屈解析では実現象との間に乖離が生じる可能性を考慮し、非線形座屈解析に基づき定式化した。

- 目的関数および剛性・応力制約関数のそれぞれについて随伴変数法を用いて解析的感度を導出し、応力制約関数の感度について精度検証を行った。

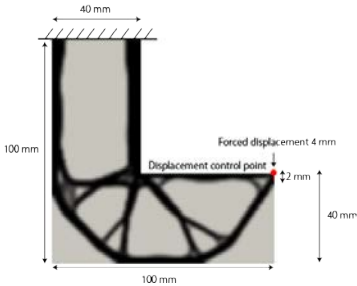


図-1 (a) 非線形座屈荷重最大化（剛性制約 90%）

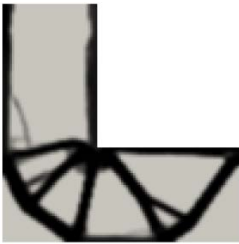


図-2 (b) 非線形座屈荷重最大化（剛性制約 90% + 応力制約 90%）

表-1 各最適化結果の目的関数値および制約関数値

	(a)	(b)
End compliance [N · mm]	3918.96	2666.91
Buckling load factor	0.248	0.999
Maximum mises stress [MPa]	1220.74	787.72

参考文献

[1] 水鳥智幸：座屈強度向上を目的としたトポロジー最適化手法の開発, 名古屋大学大学院工学研究科修士論文（未公刊）, 2022.

[2] Bruggi, M. : On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization, Struct. Multidisc. Optim., Vol. 36, pp125-141, 2008.

[3] Leon, D.M.De., Gonçalves, F.J., Soouza, C.E.de. : Stress-based topology optimization of compliant mechanisms design using geometrical and material nonlinearities, Struct. Multidisc. Optim., Vol. 62, pp231-248, 2020.