

微分演算子形式のペリダイナミックスを用いた E 積分の評価

五大開発株式会社 正会員 ○藤田 達大
石川工業高等専門学校 正会員 新保 泰輝

1. 目的

破壊力学において、エネルギー解放率は破壊を特徴付ける重要なパラメータである。エネルギー解放率を求める際によく用いられる公式として J 積分がある。J 積分は、亀裂の直線進展を仮定しているため、亀裂が折れ曲がる瞬間後のエネルギー解放率を求めることが難しい。さらに、J 積分の計算にはひずみエネルギー密度や変位勾配を求める必要がある。一方で E 積分は亀裂が折れ曲がる瞬間後のエネルギー解放率を求めることができ、E 積分の計算には、表面応力と変位のみで評価できる。ところで、破壊現象を解析する際によく使われる数値計算の手法としてペリダイナミックスがある。エネルギー解放率は破壊を特徴づける重要なパラメータであるがペリダイナミックスを用いた評価はほとんど行われていない。本研究では基礎的な検討として、一様引張応力を受ける材料に対して、亀裂は直線進展を仮定し、微分演算子形式のペリダイナミックスを用いて E 積分の評価を行った。

2. E 積分

本研究では、2 次元の線形弾性体を仮定する。その際の E 積分¹⁾は次式で与えられる。

$$E(l, \alpha) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \left(\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} - \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial l} \cdot \mathbf{u} \right) ds$$

ここで、 $\mathbf{u}$ は変位、 $\mathbf{t}$ は表面応力、 l は進展亀裂長、 α は荷重、 Γ は積分対象の境界である。

3. 微分演算子形式のペリダイナミックス

(1) 微分演算子形式²⁾

ペリダイナミックスは、積分方程式であるため方程式に空間微分が存在しないことにより、破壊現象で生じる不連続な場合の解析も対応できる。微分演算子形式のペリダイナミックスは微分を積分に置き換える方法で離散化が行われる。1 次元の微分演算子形式に関しては、2 点間の距離を $\xi = x' - x$ とすると、

ある関数 $f(x)$ の p 階微分は、

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \int_H g_N^p(\xi) (f(x+\xi) - f(x)) d\xi$$

と書くことができる。 $g_N^p(\xi)$ はペリダイナミックス関数である。 H はホライゾンであり、ホライゾン内にある粒子 x' を対象に積分が行われる。上式は 2 次元および 3 次元の拡張も可能である。応力やひずみには変位の微分が含まれ、それらの微分を上記の式に置き換えて使用する。本研究では弱形式を用いたペリダイナミックと計算領域を分離するペリダイナミックスの 2 つのモデルに対し、E 積分を実施した。

(2) 弱形式型ペリダイナミックス²⁾

弱形式型ペリダイナミックスは、直接境界領域を指定して計算する方法であり、支配方程式は、

$$\oint_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma = 0$$

と書くことができる。ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ はコーシー応力であり、 $\mathbf{n}$ は法線ベクトル、 $\mathbf{t}^*$ は表面応力である。 $\delta \mathbf{u}$ は仮想変位であり、最終的な計算には用いない。

(3) 計算領域分離型ペリダイナミックス³⁾

計算領域分離型ペリダイナミックスは、境界領域 B 、ホライゾン内に粒子が満たされている領域 D 、そしてホライゾン内に粒子が満たされていない領域 R の 3 つに領域を分けて計算する方法である。それぞれの領域で解かれる方程式は、

$$\int_{H_x} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_N(\mathbf{x}, \xi) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}') \mathbf{g}_N(\mathbf{x}', -\xi)) dV_{x'} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \in D)$$

$$\int_{H_x} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}')) \mathbf{g}_N(\mathbf{x}, \xi) dV_{x'} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \in R)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \quad (\mathbf{x} \in B)$$

である。ここで、 $\mathbf{g}_N$ はペリダイナミックス関数である。

キーワード E 積分, ペリダイナミックス

連絡先 〒921-8051 石川県金沢市黒田 1 丁目 35 番地 五大開発株式会社 TEL 076-240-6588

4. 計算結果

解析に用いたモデルを図 1 に示す. 図 1 のモデルは平面応力を仮定し, 無限板と中央に横方向に亀裂を縦横 1 m, 亀裂長 $l=0.125\text{m}$ でモデル化している. ヤング率 $E=68.6\text{Gpa}$, ポアソン比 0.3, 亀裂進展長と亀裂長の比は 1/8 とした. 粒子数は 16,384 個として等間隔に配置し, 荷重は物体の上下方向に一様引張応力 $\sigma=1\text{Gpa}$ を与えた. このモデルにおけるエネルギー解放率の厳密解は, $G_0=\pi l \sigma^2/2E$ である. 亀裂の進展は, 左右に直進進展, 左のみ直進進展, 右のみ直進進展の 3 パターンを計算した. E 積分の積分経路は図 1 に示すように 3 経路とした. Path1 は, 物体全体を囲む経路であり, Path2 および Path3 は, 亀裂先端を左または右のみ含む経路である. 表 1 と表 2 は弱形式型ペリダイナミックと計算領域分離型ペリダイナミックの計算結果である. 表中の値は, E 積分の値を厳密解 G_0 で割った値である. 経路内に亀裂の進展を含む場合は 1 に近ければ精度が良く, 経路内に亀裂の進展を含まない場合は 0 に近ければ精度が良いといえる. 表 1 と表 2 より, 2 種のペリダイナミックスを比較すると, 弱形式型の方が精度は高い. これは直接境界領域を指定して計算するため, 亀裂付近の精度が高いからだと考えられる. ただし, FEM を用いた E 積分の先行研究¹⁾においては, 厳密解との誤差はどの経路を選んでも 0.2%以下であり, 今回の計算結果は, どちらの結果も 10%以上の誤差があり精度が良い結果とは言えない. ただし, 先行研究¹⁾では, 亀裂進展長と亀裂長の比は 1/128 であり, この比を小さくできれば精度向上が期待できる.

5. まとめ

本研究では基礎的な検討として, 一様引張応力を受ける材料に対して, 亀裂は直進進展を仮定し, 微分演算子形式のペリダイナミックスを用いて E 積分の評価を行った. 弱形式のペリダイナミックと計算領域を分けるペリダイナミックスの 2 つのモデルを使い E 積分の比較を行い, 弱形式のペリダイナミックの精度が良いことが確認できた. 今後は, 亀裂進展長と亀裂長の比を小さくすること, そして, 亀裂が折れ曲がる場合の亀裂進展における E 積分の評価を行う.

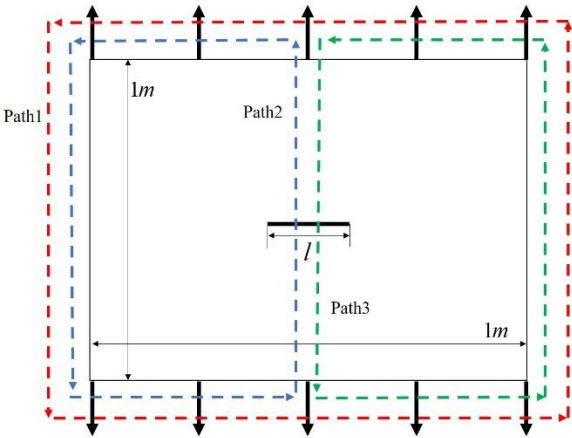


図 1 E 積分の積分経路

表 1 弱形式型ペリダイナミックスの E 積分の結果

	Path1	Path2	Path3
左右進展	1.12872	1.09928	1.11098
左のみ進展	1.12866	1.10950	-0.00162
右のみ進展	1.12868	-0.01146	1.11539

表 2 計算領域分離型ペリダイナミックスの E 積分の結果

	Path1	Path2	Path3
左右進展	1.21028	1.16392	1.26267
左のみ進展	1.20953	1.17457	0.03879
右のみ進展	1.21024	-0.01543	1.22450

謝辞

本研究は JSPS 科研費 19K04957 の助成を受けたものです.

参考文献

1) 鱸 洋一, 矢富盟祥:アイソパラメトリック要素を用いた E 積分によるエネルギー解放率の有限要素解, 構造工学論文集, Vol.43A, PP.437-444, 1997.

2) E.Madenci, A.Barut, M.Dorduncu: Peridynamic Differential Operator for Numerical Analysis , Springer, New York, 2019

3) D.Behera, P.Roy, S.V.KAnicode, E.Madenci: Imposition of local boundary conditions in peridynamics without a fictitious layer and unphysical stress concentrations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 393, 2022, 114734