

適応型代理モデルによる効率的な限界状態確率の計算法のための停止則の検討

東北大学 学生会員 ○中村 朋佳 東京都市大学 学生会員 堀田 海陽
東京都市大学 正会員 吉田 郁政 東北大学 正会員 大竹 雄

1. はじめに

信頼性評価手法，すなわち限界状態を超過する確率（以下，限界状態確率）の効率的計算法として近年，計算機能力の向上に伴い Monte Carlo Simulation (MCS) を用いた方法が注目されている．Echard et al. による適応型代理モデルと MCS を組み合わせた AK-MCS¹⁾ (Active learning reliability method combining Kriging and MCS) が提案されて以来，その手法の改良に関する非常に多くの論文や SOA レポート^{例えば2)}が報告されている．改良の観点の1つである停止則についても複数の方法が提案されているが，それらの性能の比較はまだ十分に行われていない．

本研究では AK-MCS の停止則と，別途提案されている停止側の2つに注目し，簡易な例題を対象に性能の比較を行った結果について報告する．

2. AK-MCS 及びその停止則の概要

実問題を扱う場合，限界状態の評価(function call, FC)は有限要素法など計算時間を要する場合が多い．この FC の回数を減らすことが計算効率の向上に重要である．AK-MCS は Kriging を用いて限界状態関数の代理モデルを構築して確率計算を行う方法である．以降，MCS による確率計算に使用する点を“粒子”，代理モデル構築のための FC 点を“サンプル”とする．

適応型学習では推定精度を高めるために追加の FC を行うサンプル点を学習関数 $U(\mathbf{x})$ (Learning function, 以下 LF) で選出する．LF は Kriging で推定した限界状態関数値の平均 $\mu_g(\mathbf{x})$ とその標準偏差 $\sigma_g(\mathbf{x})$ の比で表される．

$$U(\mathbf{x}) = \frac{|\mu_g(\mathbf{x})|}{\sigma_g(\mathbf{x})} \quad (1)$$

LF の値が最も小さい粒子，すなわち限界状態に近く不確定性が大きい点を次の FC を行う点とする．追加した FC 点の限界状態関数値を基に代理モデルを更

新する．この手順を繰り返すことで高精度化を行う．

文献²⁾によると停止則は LF，代理モデルの精度に基づく2つの方向で改良が行われている．本検討では LF に基づく停止則として式(1)に示す U 関数，代理モデルの精度に基づく停止則として信頼性指標 β を用いる Beta bounds²⁾に注目し，それらの性能の比較を試みた．AK-MCS で使われている LF による停止則では，式(1)が閾値 2.0 以上になった場合に停止する¹⁾．Beta bounds では式(2)–(4)に示す推定した限界状態関数，それらに $2\sigma_g(\mathbf{x})$ を加算，減算した3種類の関数より信頼性指標 β を算出し，式(5)が閾値 0.01 以下になった場合に停止する²⁾．

$$g(\mathbf{x}) = \mu_g(\mathbf{x}) \quad (2)$$

$$g(\mathbf{x})^- = \mu_g(\mathbf{x}) - 2\sigma_g(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$$g(\mathbf{x})^+ = \mu_g(\mathbf{x}) + 2\sigma_g(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$\frac{|\beta^+ - \beta^-|}{\beta} \leq 0.01 \quad (5)$$

これら2つの停止則では論文中で上記の閾値が示されている．この閾値により計算負荷が変化するが，計算負荷が軽いほど精度が低下するトレードオフの関係にある．

3. 簡易な例題を対象とした検討

Echard et al. による変数2個の例題¹⁾の限界状態関数を式(6)に示す．これを例題1と呼ぶ．

$$g(x_1, x_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 - \frac{(x_1 + x_2)}{\sqrt{2}}; \\ 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 + \frac{(x_1 + x_2)}{\sqrt{2}}; \\ (x_1 - x_2) + \frac{7}{\sqrt{2}}; (x_2 - x_1) + \frac{7}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \quad (6)$$

ここで，変数 x_1, x_2 は標準正規分布に従う確率変数である．FC を 150 回まで繰り返し計算を行い，それぞれの停止則の閾値との関係を調べた．計算負荷として設定した閾値に達した際の FC 回数，精度として

キーワード Active learning, 代理モデル, 学習関数, 停止則

連絡先 〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学 工学研究科

その際の算定された確率に注目した。図-1 に一例として Beta bounds で設定した 4 つの閾値と FC 回数の関係、図-2 にそれら閾値に達した際に算定した限界状態確率と FC 回数の関係を示す。この計算を乱数の種を変えて 100 回試行し、推定した確率が対象とする限界状態確率の 95%信頼幅内に含まれている試行回数と、それらの閾値に到達した際の FC 回数の平均回数で比較した。それぞれの停止側の閾値として U 関数は 0.001 から 7.0, Beta bounds は 1 から 10^{-7} について対数軸上で 100 等分した値を設定した。図-3 に比較結果を示す。横軸が 100 回試行した際の設定した閾値に到達した際の FC 回数の平均、縦軸が 95% 信頼幅内に含まれなかった試行回数、すなわち精度を表している。図-3 より U 関数に基づく停止則の方が少ない評価回数で高い精度の結果が得られた。

Echard et al.による別の例題³⁾(例題 2)を対象に比較を行った結果を示す。限界状態関数を式(7)に示す。

$$g(x_1, x_2) = 0.5(x_1 - 2)^2 - 1.5(x_2 - 5)^3 - 3 \quad (7)$$

図-4 に U 関数, Beta bounds の比較結果を示す。この例題では Beta bounds に基づく停止則の方が少ない評価回数で高い精度が得られた。

4. おわりに

本報告では、適応型代理モデルと MCS を組み合わせた AK-MCS に注目し、その改良点の 1 つである停止則について検討を行った。複数の例題を対象に 2 つの停止則の性能を精度と計算負荷のトレードオフ曲線で比較した。本検討では簡易的な例題のみで比較したが、今後、新たな例題や実問題を対象に比較し、必要に応じて停止則の改良を行う。

参考文献

- 1) Echard et al.: AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation, Structural Safety, Vol.33, No.2, pp.145-154, 2011.
- 2) Moustaphaet et al.: Active learning for structural reliability: Survey, general framework and benchmark, Structural Safety, 102174, 2022.
- 3) Echard et al.: A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models, Reliability Engineering & System Safety 111,

pp.232-240, 2013.

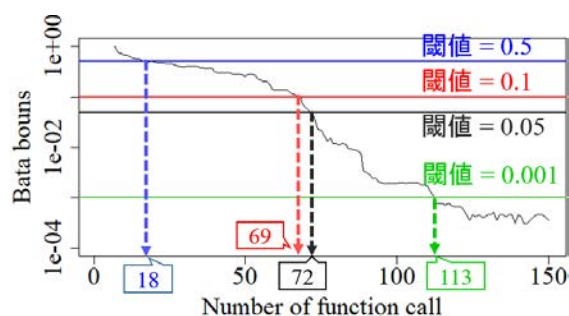


図-1 Beta bounds の閾値と FC 回数の関係

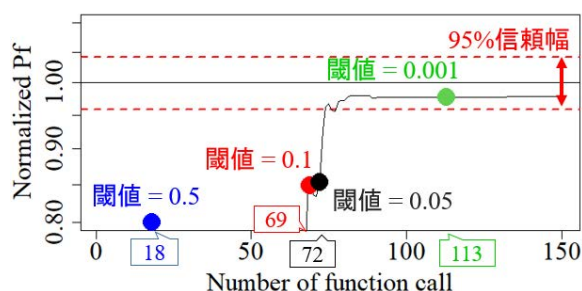


図-2 推定した限界状態確率と FC 回数の関係

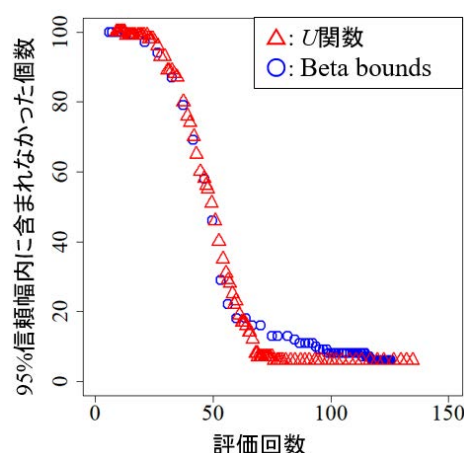


図-3 例題 1¹⁾の停止則の比較結果

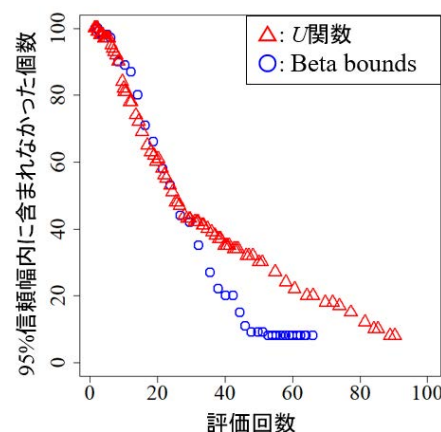


図-4 例題 2³⁾の停止則の比較結果