

IGA を用いた非圧縮粘性流れ解析に関する基礎的研究

中央大学大学院 学生員 ○坂井 祐仁
 中央大学大学院 学生員 安井 太一
 日本大学 正会員 長谷部 寛
 中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

近年、任意曲面を有する解析手法として、IGA (Isogeometric Analysis)¹⁾²⁾ が注目されている。

本研究では、IGA を用いた流体-構造連成解析手法の構築を目的とし、本報告ではその基礎的研究として、2次元非圧縮粘性流れのベンチマーク問題である円柱周り流れ問題に対して NURBS 関数を用いた IGA を適用し、その妥当性と有効性の検証を行った。

2. 数値解析手法

(1) 定式化

2次元非圧縮粘性流体の支配方程式には、以下に示す無次元化した Navier-Stokes の運動方程式と連続式を用いる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域であり、 u_i は流速、 p は圧力、 Re はレイノルズ数である。

Dirichlet 境界条件、Neumann 境界条件はそれぞれ以下のように表される。

$$u_i = g_i \quad \text{in } \Gamma_g \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) n_j = h_i \quad \text{in } \Gamma_h \quad (4)$$

ここで、 Γ_g 、 Γ_h は、Dirichlet 境界条件、Neumann 境界条件を表し、 g_i 、 h_i はそれぞれの境界上で規定される流速とトラクションである。また δ_{ij} は Kronecker のデルタ、 n_i は外向き単位法線ベクトルである。

支配方程式 (1)、(2) に対し、空間方向の離散化に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用い、時間方向の離散化手法として、流速に対して二次精度である Crank-Nicolson 法を適用し、連続項の流速と圧力に関しては陰的に取り扱う。また、移流速度 $\bar{\mathbf{u}}_i$ は、式 (5) に示す 2 次精度の Adams-Bashforth 法により陽的に近似を行い、線形化する。

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{3}{2} \mathbf{u}_i^n - \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^{n-1} \quad (5)$$

以上により式 (6) に示すような有限要素方程式を得る。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{M}_S) \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_S) \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n) \\ & - (\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{Si}) \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{D}_{ij} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n) \\ & + \mathbf{C}_j \mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{M}_{Pj} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\Delta t} \\ & + \mathbf{A}_{Pj} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n) + \mathbf{G}_P \mathbf{p}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{C}$ はそれぞれ時間微分項、移流項、圧力項、粘性項、連続項の係数行列を表す。添字 S 、 P は SUPG 項、PSPG 項に起因する行列である。有限要素方程式の解法としては反復解法である GPBi-CG 法を用いる。

(2) NURBS

本研究では形状関数に用いる Spline 関数として、制御点に付与される重みによって、少ない要素数で様々な形状を表現することができる NURBS 関数を用いた。二次元の NURBS 関数は、二方向の B-Spline 基底関数と制御点に付与される重み、制御点の位置ベクトルによって表現される。B-Spline 基底関数とは、式 (1) の Cox de Boor の漸化式によって定義される関数である。

$p = 0$ の場合：

$$\begin{aligned} N_{i,0}(\xi) &= 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ N_{i,0}(\xi) &= 0 & \text{otherwise} \end{aligned}$$

$p = 1, 2, 3 \cdots$ の場合：

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (7)$$

ここで、 N は ξ 方向の B-Spline 基底関数、 i は制御点番号、 p は B-Spline 基底関数の次数、 ξ_i はパラメータ空間の座標であるノットであり、以下に示すようなノットベクトルと呼ばれる一様増加する数列によって与えられる。

$$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+p+1}) \quad (8)$$

ノットベクトルは、CAD で描いた形状モデルから得られる数列で、B-Spline 基底関数と IGA における要素を定義するパラメータである。式 (7) で表される B-Spline 基底関数を用い、NURBS 関数の基底関数 $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$ と NURBS 曲面 $S(\xi, \eta)$ は式 (10) のように表される。

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (9)$$

KeyWords : Isogeometric Analysis, NURBS, Incompressible Viscous Flow, Navier-Stokes Equation

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL : 03-3817-1815 E-mail :a19.appt@g.chuo-u.ac.jp

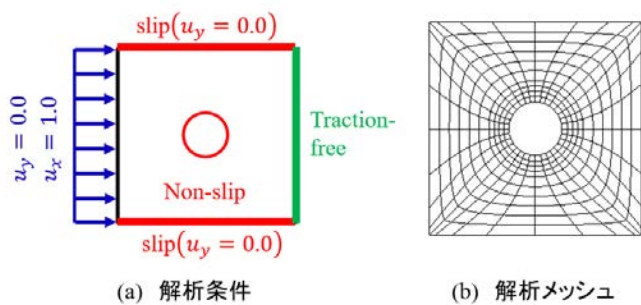


図-1 解析モデル，境界条件

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) B_{i,j} \quad (10)$$

ここで， M は η 方向の B-Spline 基底関数， j は η 方向の B-Spline 基底関数の制御点番号， q は η 方向の B-Spline 基底関数の次数， $w_{i,j}$ は物理空間の座標である制御点に付与される重み， $B_{i,j}$ は制御点の位置ベクトルである。

(3) IGA における変数変換

IGA では形状関数である NURBS 基底関数がノット (ξ, η) から決定される関数であるので，物理空間 $\Omega_e(x, y)$ からパラメータ空間 $\tilde{\Omega}_e(\xi, \eta)$ へ変数変換を行う。その後，積分を行うためにパラメータ空間 $\tilde{\Omega}_e(\xi, \eta)$ から親要素 $\bar{\Omega}_e(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ へ変数変換を行い，親要素上で積分を行うことで係数行列を求めていく。

3. 数値解析例

数値解析例として，2次元円柱周り流れ問題を取り上げる。

a) 解析条件

解析領域および解析条件は図-1(a)に示す通りである。境界条件として，円柱上ですべりなし条件 (no-slip 条件)，側壁ではすべり条件 (slip 条件)，下流側流出境界ではトラクションフリー (traction-free) 条件とした。

また，解析条件として，Reynolds 数は 10^3 とし，時間増分量 δt は 0.01 を用いた。

b) 解析メッシュ

図-1(b)に示す通り， ξ 方向に 10 分割， η 方向に 32 分割した際の解析メッシュを用いた。

また，解析に用いる NURBS 関数には， ξ, η 方向ともに 2 次の NURBS を用いている。

c) 解析結果

揚力が最大、最小になる無次元時刻 $T = 203.8, T = 194.7$ における流速ベクトルと圧力コンターにおける可視化結果を図-2, 図-3に示す。この結果より，IGA を用いて円柱まわりの流れを解析できることを確認した。

また，抗力係数および揚力係数における時刻歴推移を図-4に示す。この結果より，カルマン渦の発生に伴い，抗力係数および揚力係数が振動している様子が見て取れる。

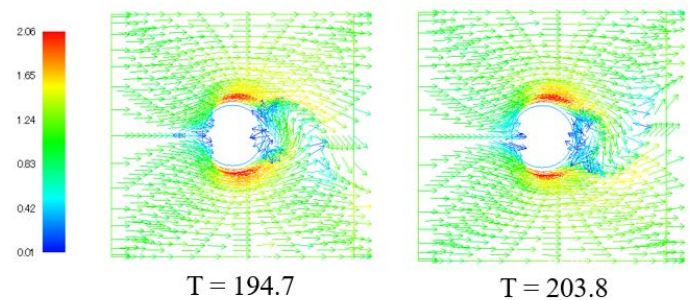


図-2 解析結果（流速ベクトル）

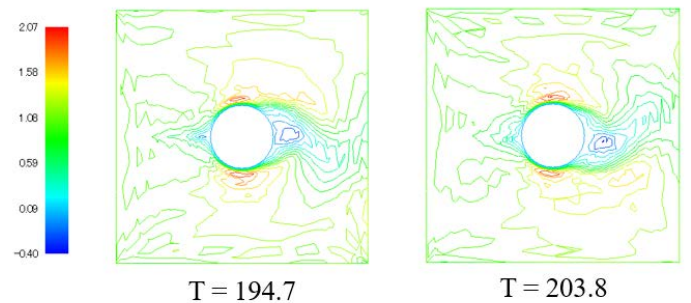


図-3 解析結果（圧力コンター）

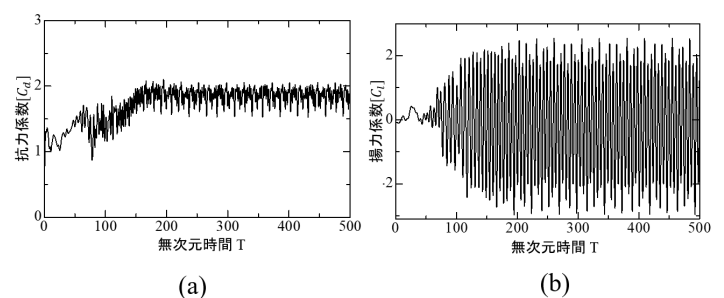


図-4 (a) 抗力係数 (b) 揚力係数

4. おわりに

本報告では，NURBS 関数を用いた IGA による 2次元非圧縮性粘性流れ問題の解析手法について述べ，適用例として 2次元円柱まわり流れ解析に取り組み妥当性と有効性の検討を行った。

FEM との比較および，補間を用いる NURBS 関数の次数と積分点数の差異による計算結果の比較等については講演時に示す。

参考文献

- 1) T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis:CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
- 2) J.A.Cottrell, T.J.R Hughes and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis:Toward integration of CAD and FEA, Wiley Publishing, 335p, 2009.