

空間 2 次精度を有する I-SPH(2)による孤立波解析

九州大学 学生会員 ○白神 嘉也

九州大学 学生会員 藤岡 秀二郎

九州大学 正会員 浅井 光輝

1. 緒言

Lagrange 記述に基づく粒子法である SPH 法では、連続体の変形に併せて粒子が移動し、粒子分布は非均一になる。非均一な粒子分布でも高精度な離散微分演算が求められ、著者らのグループでは空間 2 次精度を有する高精度な微分モデル¹⁾ (以下、SPH(2)と略記) を提案してきた。特に、自由表面流れ問題では粒子配置の乱れる傾向は強くなり、SPH(2)のよい適用例として期待していた。しかし、高精度微分モデルのみでは表面付近で計算が逆に不安定となる問題が残されている。本研究では、SPH(2)による自由表面流れ解析の計算安定化を目的とし、自由表面判定などを改良した I-SPH(2)を提案する。さらに、孤立波解析によって SPH(2)の有用性を示す。

2. SPH(2) (高精度微分モデル)

SPH(2)は、従来の SPH 法の枠組みで提案されてきた勾配補正モデルをさらに高精度化した勾配モデルと、空間の 2 階微分項に対する高精度モデルから構成される。両者とも、理論的には空間 2 次精度を満たすモデルであるが、数値誤差の影響からか粒子配置の乱れにより、収束性の低下する傾向があった。そこで、より高精度な演算が期待できるように、粒子再配置法を併用した。

2.1. 勾配補正モデルと SPH(2) の勾配モデルの比較

勾配補正モデルは、SPH 近似により離散化した状態で Taylor 展開することで、次式のように導出できる。

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi \rangle_i &:= L_i^{-1} \bigcup_{j \in S_i} V_j (\phi_{ij} - R) \nabla w_{ij} \\ &\cong \bigcup_{j \in S_i} V_j \phi_{ij} L_i^{-1} \nabla w_{ij} =: \bigcup_{j \in S_i} V_j \phi_{ij} \tilde{\nabla} w_{ij} \\ L_i &= \bigcup_{j \in S_i} V_j (\nabla w_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}) \end{aligned} \quad (1)$$

V_j は j 粒子の代表体積、 ϕ_i は i 粒子の物理量 ($\phi_{ij} := \phi_j - \phi_i$)、 w_{ij} は j 粒子の i 粒子に対する重み、 $\mathbf{r}_i$ は i 粒子の位

置ベクトル ($\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$) を示す。 R は Taylor 展開の剰余項であり、ここでは 2 次以上の高次項となる。式 (1) の修正勾配モデルは 2 次以上の項を無視した 1 次精度のモデルであるため、 R に次節で与える空間 2 階微分項をまでを考慮した修正したモデルが、SPH(2)の勾配モデルである。

2.2. SPH(2) モデルによる空間 2 階微分

2 次元問題における高精度 2 階微分モデルは、次式に示す 3×3 の行列を各 2 階微分項に対して数値的に解くことで評価できる。

$$\begin{aligned} \bigcup_{j \in S_i} V_j F_{ij} \mathbf{q}_{ij} \mathbf{p}_{ij}^T \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right]^T \\ = 2 \bigcup_{j \in S_i} V_j F_{ij} \mathbf{q}_{ij} \left(\phi_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \bigcup_{k \in S_i} V_k \phi_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 F_{ij} , $\mathbf{q}_{ij}$, $\mathbf{p}_{ij}$ は次の式で定義される。

$$F_{ij} := \mathbf{r}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} w_{ij} / |\mathbf{r}_{ij}|^4 \quad (3)$$

$$\mathbf{q}_{ij} := [x_{ij}^2 \quad y_{ij}^2 \quad x_{ij} y_{ij}]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{p}_{ij} := [A(x, x) \quad A(y, y) \quad A(x, y)]^T \quad (5)$$

$$A(a, b) := a_{ij} b_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \bigcup_{k \in S_i} V_k a_{ik} b_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \quad (6)$$

3. 正方形パッチテスト (解析的に微分可能な関数による数値微分モデルの検証)

3.1. 概要

図-1 に示す微分可能な連続関数のラプラシアンについて、理論値と粒子による離散微分値を用いて、高精度モデルと標準モデルの比較検証を行った。検証のための誤差評価関数は RMSE (Root Mean Squared Error) とする。検証に際して、影響半径内の粒子が欠損しない内部と、欠損が生じる外部境界周辺の 2 つの領域を対象とした。

3.2. 精度検証結果

検証結果を図-2 に示す。標準的なラプラシアンモデルでは、粒子欠損のない内部領域においても粒子直径の減少に伴う収束性が見られず、外部領域においては誤

キーワード 粒子法, ISPH 法, 高精度微分モデル, 自由表面判定, 孤立波

連絡先 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 九州大学 構造解析学研究室 TEL: 092-802-3370

差が増大した。一方、高精度モデルでは粒子欠損が見られる際にも粒子直径の減少による1次収束を確認した。

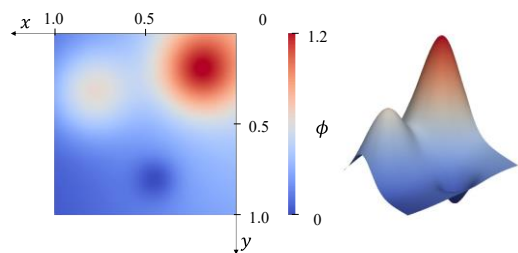
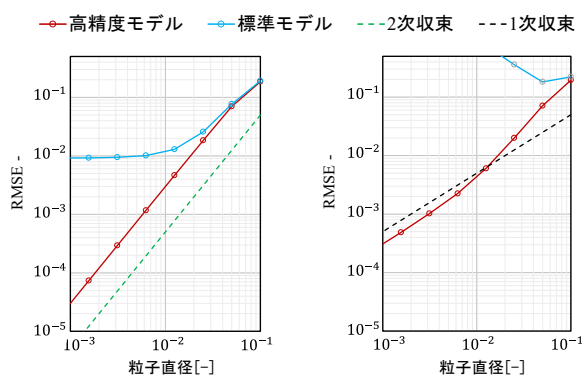


図-1 検証関数の形状



(a) 内部粒子

(b) 外部粒子

図-2 ラプラシアンの結果

4. 自由表面流れ解析

4.1. 高精度微分モデルによる解析に向けた改良

高精度微分モデルによる自由表面流れ解析の計算不安定化は、特に自由表面判定の誤判定により、圧力ポアソン方程式によって求解された非現実的な圧力が原因であった。そこで固有値による自由表面判定²⁾に改良を施した I-SPH(2)を提案する。

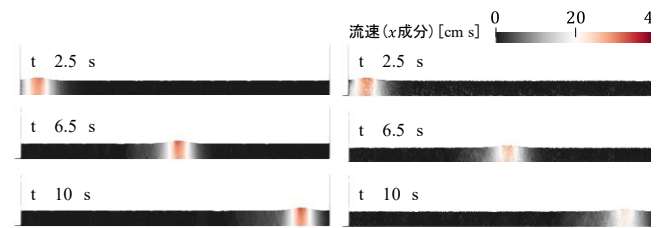
4.2. 孤立波解析

解析モデルは、1400cm×20cmの水路と造波板からなる。造波板を Goring³⁾の提案式に基づき駆動させて孤立波を生成し、速度分布と水深の時間遷移を計測した。ここでは本研究で提案した I-SPH(2)と従来型の ISPH モデルの比較を行う。

4.3. 解析結果

速度分布を図-3 に示す。従来モデルでは速度が減衰しながら波が進行するが、I-SPH(2)では速度の減衰が少ないことが示されている。また、孤立波による水深変化を示した図-4 では、I-SPH(2)によって、孤立波の波高が保持されることを定量的に確認した。これらから、I-SPH(2)は従来モデルよりも、エネルギー保存性が優れ

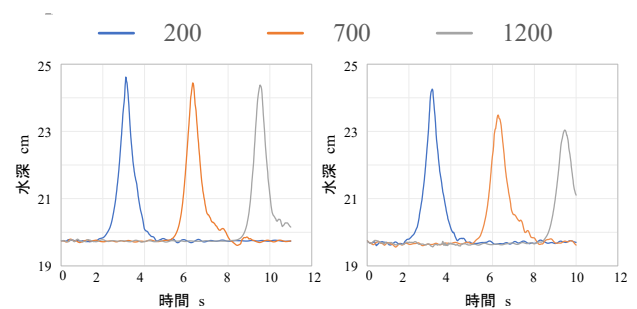
ているモデルであることが示された。



(a) I-SPH(2)

(b) 従来モデル

図-3 各時間ステップの流速分布の比較



(a) I-SPH(2)

(b) 従来モデル

図-4 孤立波による各地点の水深の変化

5. 結言

本研究では、空間2次精度を有する微分モデルである SPH(2)を自由表面流体解析に適用するために、自由表面の判定に改良を施した I-SPH(2)を提案した。高精度微分モデルのみを導入した際には、自由表面の誤判定に伴う圧力振動が計算不安定性の要因であることを究明し、その改良を行った。また孤立波解析によって、エネルギー保存性に関する I-SPH(2)の優位性を示した。今後は、波の斜面遡上において見られる、ソリトン分裂による波の分散性を I-SPH(2)によって再現することで、高精度な解析が可能であることを示す。

参考文献

- 1) 藤岡秀二郎, 辻勲平, 浅井光輝, 高精度 SPH 法 ～空間2次精度の勾配・ラプラシアン・混合微分～, 土木学会論文集, Vol. 79, No.15, 22_15019, 2023.
- 2) S. Marrone, A. Colagrossi, D. Touze', and G. Graziani, Fast free-surface detection and level-set function definition in sph solvers, J. Comput. Phys., Vol.229, No.10, pp.3652–3663, 2010.
- 3) C. H. Su, R. M. Mirie, On head-on collisions between two solitary waves. J. Fluid Mech, Vol.98, No.3, pp. 509-525, 1980