

時間依存性下負荷面摩擦モデルを適用した 速度型動的微小変形解析手法の開発

名古屋大学 学生会員 ○安池 亮

正会員 豊田 智大

フェロー会員 野田 利弘

1. はじめに

土圧解析や支持力解析といった構造物～地盤の相互作用問題においては、これまで、物体間の摩擦について種々の理想化がなされることが多い。つまり、接触面は常に完全固着状態にあるか、完全塑性すべり状態（摩擦なし、またはクーロン摩擦則にしたがう定摩擦力の作用）が二者択一で仮定される場合が大半である。しかし、実際の摩擦現象は、固着～すべり状態が接触面の相対変位に応じて滑らかに遷移し、それに伴って摩擦力も静止摩擦力～動摩擦力間で連続的に増減する。本稿では、摩擦力の連続的変化を記述可能な尾崎ら¹⁾の時間依存性下負荷面摩擦モデルを速度型動的変形解析手法に境界条件として実装し、安定すべりや stick-slip 現象といった境界強非線形性に由来する顕著な動力学現象が初期値境界値問題の解として得られることを示す。

2. 定式化手法の概要

本稿で使用した時間依存性下負荷面摩擦モデルは、接触応力速度とすべり速度（相対速度）の関係を与える速度型の構成式であり、固着～すべり状態の遷移を連続的に記述可能である。本稿では、同モデルにより表現される接触力を境界条件として与えるとともに、物体の慣性力を考慮した速度型動的変形弾性解析を定式化・実装する。ただし、本稿では摩擦由来の境界強非線形挙動のみに着目するため、物体の弾塑性と有限変形は無視している（動的微小変形弾性解析）。定式化の詳細は紙幅の都合上割愛するが、微小領域の有限要素離散化した速度型運動方程式は以下となる。

$$M\{\dot{\mathbf{v}}^N\} + (K - K_c)\{\mathbf{v}^N\} = \{\mathbf{f}\} \quad (1)$$

ここに、 M, K は有限要素法における要素質量マトリクス、要素剛性マトリクス、 $\{\mathbf{v}^N\}$ は要素各節点の変位速度列ベクトルである。 $K_c, \{\mathbf{f}\}$ は下負荷面摩擦モデルより以下のように示すことができる。

$$K_c = \begin{cases} \int_{s_c} [\tilde{N}]^T [Q]^T [C^{ep}] [Q] [\tilde{N}] ds & \dots \text{負荷時} \\ \int_{s_c} [\tilde{N}]^T [Q]^T [C^e] [Q] [\tilde{N}] ds & \dots \text{除荷時} \end{cases} \quad (2)$$

$$\{\mathbf{f}\} = \begin{cases} \int_V [N]^T \{\mathbf{b}\} dV + \int_{s_t} [\tilde{N}]^T \{\mathbf{t}\} ds + \int_{s_c} \left\{ -[\tilde{N}]^T [Q]^T [C^{ep}] [Q] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} + C^c [\tilde{N}] \{\mathbf{t}\} \right\} ds & \dots \text{負荷時} \\ \int_V [N]^T \{\mathbf{b}\} dV + \int_{s_t} [\tilde{N}]^T \{\mathbf{t}\} ds + \int_{s_c} \left\{ -[\tilde{N}]^T [Q]^T [C^e] [Q] [\tilde{N}] \{\mathbf{v}_m^N\} \right\} ds & \dots \text{除荷時} \end{cases} \quad (3)$$

ここに、 $[N], [\tilde{N}]$ は有限要素法の形状関数に由来するマトリクスであり、 $\{\mathbf{b}\}, \{\mathbf{t}\}$ は連続体に作用する既知の物体力と応力速度である。 $[C^{ep}], [C^e], C^c$ は下負荷面摩擦モデルに由来する項であり、記号は尾崎ら¹⁾に準拠する。 $\{\mathbf{v}_m^N\}$ は要素境界上における母材速度の係数列ベクトルである。 $\{\mathbf{t}\}$ はすべり方向の単位ベクトルであり、接触力の接線方向成分 f_t を用いて、 $\mathbf{t} = \mathbf{f}_t / \|\mathbf{f}_t\|$ と定義する。 $[Q]$ はデカルト座標系の正規直交基底 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ と接触力境界面上の正規直交基底 $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n\}$ の関係を表す座標変換行列である。

$$[Q] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_t & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{xt} & \cos \theta_{yt} \\ \cos \theta_{xn} & \cos \theta_{yn} \end{bmatrix} \quad (\text{二次元の場合}) \quad (4)$$

式(1)を Wilson- θ 法により時間離散化して得られる連立方程式を iterative に解き、次刻の状態を予測してゆく。

キーワード 摩擦, stick-slip 現象, 安定すべり, 下負荷面, 動的変形解析, 有限要素法

連絡先 〒464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町 TEL 052-789-3835

摩擦係数の発展則は、尾崎ら¹⁾に倣い、塑性すべりに伴う摩擦係数の減少（静止摩擦→動摩擦）を表す第一項と、凝着による摩擦係数の回復（動摩擦→静止摩擦）を表す第二項を組み合わせることで次式で与える。

$$\dot{\mu} = -\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1\right)^m \|\dot{\mathbf{v}}^p\| + \eta \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s}\right)^n \tag{5}$$

ここに、 μ_s, μ_k は静止摩擦係数、動摩擦係数であり、 κ, m は塑性すべりによる軟化速度を規定する非負の材料定数、 η, n は時間経過に伴う硬化速度を規定する非負の材料定数とする。

3. 解析条件（二次元平面ひずみ解析）

1 要素の線形弾性体における周期的な振動現象の再現解析について述べる。図 1 に示すように、1m×1m の弾性体の上面を完全固定、底面を接触力境界条件（ただし、鉛直変位固定）とし、底面で解析対象の弾性体と接触する母材に水平変位速度 v_m （0.001m/s で一定）を与えた。ここで、特徴的な摩擦現象を生じうる摩擦係数の発展則のパラメータを表 1 の通り 3 ケース設定した。また、初期の接触面状態は固着状態を想定し、母材と同一の速度を与えた。各種パラメータおよび初期条件は表 2 の通り設定した。図 1 の節点①の水平変位が 0.2m の位置で最大静止摩擦力とせん断による復元力が釣り合うようなパラメータ設定としている点に留意したい。

表 1 実施 Case

Case	κ (m ⁻¹)	η (s ⁻¹)
1	0.0	0.0
2	10.0	0.0
3	10.0	0.01

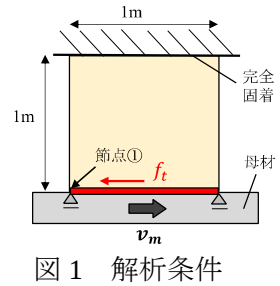


表 2 各種パラメータと初期条件

接触面の物性値	
静止摩擦係数 μ_s	0.4
動摩擦係数 μ_k	0.2
接線方向ペナルティ係数 α_t (kPa/m)	1000
法線方向ペナルティ係数 α_n (kPa/m)	1000
発展則パラメータ	
正規圧密度化指数 r	100
軟化速度を規定する材料定数 m	1
硬化速度を規定する材料定数 n	1
弾性体パラメータ	
弾性係数 E (N/m ²)	5.6×10^3
ポアソン比 ν	0.4
密度 ρ (g/cm ³)	1.0
初期条件	
初期摩擦係数 μ_0	0.4
初期摩擦力 f_{t0} (Pa)	1.0×10^{-7}
初期垂直抗力 f_{n0} (Pa)	1000

4. 解析結果

解析結果を図 2 に示す。Case 1 では、釣り合い位置の 0.2m まで母材との固着が維持され、その後、安定すべりが解かれている。Case 2 では摩擦係数が減少する効果のみを考慮をしているため、一度すべり出したのち動摩擦係数に対応する変位あるいは摩擦力で安定すべりが解かれている。Case 3 では、摩擦係数減少と回復の効果を考慮しており、周期的な変位と摩擦力の増減を確認でき、stick-slip 現象の発生が解かれた。図 3 には図 2 の変位－時間関係上にプロットした時刻の変形を示しており、点線が初期状態、実線が変形後の状態を表している。確かに時間経過に伴う急激な変形現象を確認できる。

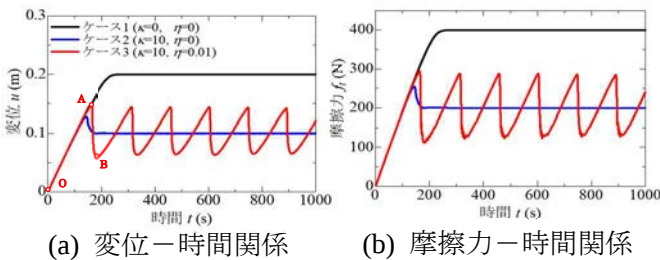


図 2 解析結果

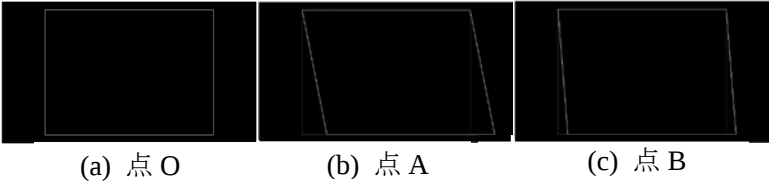


図 3 時間経過に伴う変形

5. おわりに

摩擦作用下にある微小変形弾性体の変形を、慣性力を考慮した速度型動的解析手法で解き、安定すべりや stick-slip 現象が解かれることを確認した。当日の講演では、1 要素での結果に加え、多要素での解析結果も示す。また、摩擦係数の発展則の物理的意義をより明確に捉えることが可能な上下負荷面モデルによる解析結果も示し、同モデルの特徴や変形解析における境界面での摩擦の重要性についても言及する予定である。

謝辞 本研究は、科学研究費補助金（基盤研究(B)：課題番号 22H01586）の助成を受けて実施した。

参考文献

1) 尾崎, 橋口, 陳(2007): 時間依存性摩擦構成式を用いた…, 応用力学論文集, Vol.10, pp.445-455.
2) 安池, 豊田, 野田(2023): 上負荷面概念に基づく摩擦係数…, 第 58 回地盤工学発表会, 投稿予定.