

間隙率が不連続に変化する飽和地盤の圧密解析における u-U 定式化の適用性

大成建設 技術センター 正会員 ○宇野 浩樹 非会員 船原 英樹

1. はじめに 水で飽和した地盤の支配方程式は、飽和土を固相と液相の二相からなると仮定した Biot の飽和多孔質体理論より、固相の変位 u 、液相の変位 U 、液相の固相に対する平均相対変位 w 、間隙水圧 p によって記述される。いくつかの定式化のうち、本研究では u-U 定式化^{例えば、1)}に着目する。これまでに、著者らは、i) 間隙率の異なる互層地盤に従来の u-U 定式化を適用すると、地層境界で流量と間隙水圧が不連続となつて誤差が生じること²⁾、ii) 誤差解消のための定式化と空間離散化を提案し、地震時挙動の評価に有用であることを示した³⁾。

本研究では、著者らが提案する u-U 定式化の空間離散化を示すとともに、間隙率が不連続に変化する 1 次元弾性土柱モデルの圧密解析に適用し、Terzaghi による理論解と比較することで提案手法の適用性について検討した。

2. 支配方程式 Biot の飽和多孔質体理論で導出される支配方程式を以下に示す。以下では液相の加速度の固相に対する相対移流項が十分小さいと仮定するとともに、微小ひずみを仮定し、土粒子は非圧縮性としている。また、全応力 σ_{ij} および有効応力 σ'_{ij} 、ひずみ ε_{ij} の符号は引張を正とし、間隙水圧 p については圧縮を正としている。

固相のつり合い式

$$(1-n)\rho^s \ddot{u}_i - n^2 \frac{\rho^w g}{k} (\dot{U}_i - \dot{u}_i) = \sigma'_{ij,j} - (1-n)p_{,i} + (1-n)\rho^s b_i \quad \text{式(1)}$$

有効応力の定義式

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \quad \text{式(4)}$$

液相のつり合い式

$$n\rho^f \ddot{U}_i + n^2 \frac{\rho^w g}{k} (\dot{U}_i - \dot{u}_i) = -np_{,i} + n\rho^f b_i \quad \text{式(2)}$$

液相の平均相対変位の定義式

$$w_i = n(U_i - u_i) \quad \text{式(5)}$$

飽和土の連続式

$$n(\dot{U}_{i,i} - \dot{u}_{i,i}) + \dot{u}_{i,i} + \frac{n}{K^w} \dot{p} = 0 \quad \text{式(3a)}$$

土骨格の構成式

$$\Delta\sigma'_{ij} = D_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \quad \text{式(6)}$$

$$\{n(\dot{U}_i - \dot{u}_i)\}_{,i} + \dot{u}_{i,i} + \frac{n}{K^w} \dot{p} = 0 \quad \text{式(3b)}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i})$$

ここに、 u_i 、 U_i 、 w_i は固相の変位、液相の変位と平均相対変位であり、 ρ^s 、 ρ^w は土粒子の密度、間隙水の密度である。 n 、 k 、 K^w は間隙率、透水係数、間隙水の体積弾性係数であり、 g 、 b_i は重力加速度、物体力である。

ここで、従来の u-U 定式化¹⁾ (以下、「u-U-1」) と著者らが提案する u-U 定式化³⁾ (以下、「u-U-2」) では、固相のつり合い式に式(1)を、液相のつり合い式に式(2)をそれぞれ同様に用いるが、飽和土の連続式については定式化ごとに採用するものが異なる。すなわち、u-U-1 では式(3a)を用いるのに対し、u-U-2 においては式(3b)を用いる。また、いずれの定式化においても、連続式によって間隙水圧 p を未知数から消去する。

3. 空間離散化 本研究では固相と液相のつり合い式の空間離散化に 1 次要素による有限要素法を適用する。ここで、u-U-2 においては、要素内の間隙率 n を節点に離散化する対角マトリックス (以下、「間隙率マトリックス」) $\bar{n}_K$ を式(7)のように導入し、要素内の平均相対変位 w_i と間隙水圧増分 Δp を節点の変位 ($\bar{u}_{Ki}$, $\bar{U}_{Ki}$) および変位増分 ($\Delta\bar{u}_{Ki}$, $\Delta\bar{U}_{Ki}$)、形状マトリックス (N_K^u , N_K^U) によって式(8)、式(9)のように近似する。 K は要素構成節点である。

$$\bar{n}_K = \left[\sum_E (dV)_E / \sum_E \left(\frac{dV}{n} \right)_E \right]_K \quad \text{式(7)}$$

$$\Delta p = -\frac{K^w}{n} \{ N_{K,i}^u (1 - \bar{n}_K) \Delta\bar{u}_{Ki} + N_{K,i}^U \bar{n}_K \Delta\bar{U}_{Ki} \} \quad \text{式(9)}$$

$$w_i = n(U_i - u_i) = N_K^U \bar{n}_K \bar{U}_{Ki} - N_K^u \bar{n}_K \bar{u}_{Ki} \quad \text{式(8)}$$

$$N_{K,i}^u = \frac{\partial N_K^u}{\partial x_i}, \quad N_{K,i}^U = \frac{\partial N_K^U}{\partial x_i} \quad \text{式(10)}$$

ここに、 $\sum_E dV_E$ は各つり合い式の弱形式の導出において要素 E から当該節点 K に空間離散化される飽和土の体積の合計であり、 $\sum_E (dV/n)_E$ は間隙率の逆数 (= $1/n$) で重み付けした飽和土の体積の合計である。すなわち、u-U-2 では式(8)によって流量の連続性が常に成立する。また、式(9)のように Δp を式(3b)の増分形で求め、各相の分応力 (固相: $\sigma'_{ij} - (1-n)p\delta_{ij}$, 液相: $-np\delta_{ij}$) による等価節点力を $\bar{n}_K$ で表すため、間隙水圧の連続性も常に成立する。

キーワード 有効応力解析, u-U 定式化, 有限要素法, 間隙率, 流量, 間隙水圧

連絡先 〒245-0051 横浜市戸塚区名瀬町 344-1 大成建設(株) 技術センター TEL. 045-814-7221

4. 解析条件 解析モデルを図1に示す。層厚は10mとし、要素の高さは0.5m、断面積 A は 1.0m^2 とした。境界条件は、底面を非排水面とし、地表面を排水面とすることで、排水長 H_d が10mの片面排水による1次元圧密条件とした。土骨格の構成則には線形弾性モデルを用いた。間隙率 n は、GL-5mで地層が分かるとし、図1のように上層と下層で異なるとした。その他の物性値は、数値実験という位置付けにより、モデル全体に均質に設定した。すなわち、透水係数 k は $1.0 \times 10^{-7}\text{m/s}$ 、ヤング係数 E は 2500kN/m^2 、ポアソン比 ν は0.25とした。間隙水の単位体積重量 $\rho^w g$ は 9.81kN/m^3 とし、体積弾性係数 K^w は $2.2 \times 10^{30}\text{kN/m}^2$ と設定することで液相を近似的に非圧縮とした。

モデル全体に一樣な初期過剰間隙水圧 Δp_0 は 100kPa とし、圧密過程は慣性項を考慮せず、静的に解析した。時間離散化には後退差分を用いた。

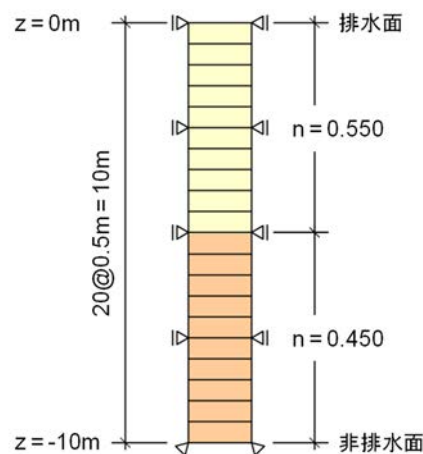


図1 解析モデル

5. 解析結果 u-U-1, u-U-2 で得られた平均圧密度 U_s の時刻歴を図2に示す。図には Terzaghi による理論解を併記しており、横軸は無次元の時間係数 T で示している。さらに、代表的な T における過剰間隙水圧比 $\Delta p/\Delta p_0$ の深度分布を図3に示し、地層境界における正規化した流量 Q の収支を図4に、 Δp に伴う節点力 F の合計を図5に示す。

u-U-1に着目すると、モデル全体の平均的な圧密は $T=0.05$ まで理論解と概ね同様に進行しているが、それ以降は多少の遅れが見られる(図2)。詳細には、 $T \leq 0.04$ における下層の $\Delta p/\Delta p_0$ が1を上回るなど、局所的な挙動が理論解と大きく異なる(図3)。これは、地層境界上において、上層側と下層側の流量の収支が合わず(図4)、上層側と下層側のそれぞれに作用する Δp が一致しないためである(図5)。すなわち、流量と過剰間隙水圧が不連続となるためである。一方、u-U-2においては、これらが常に連続するため、数値解が理論解とよく一致している。

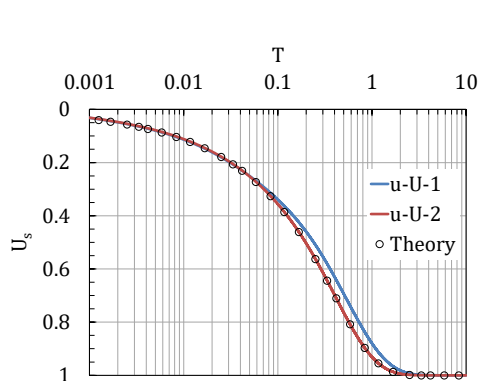


図2 平均圧密度の時刻歴

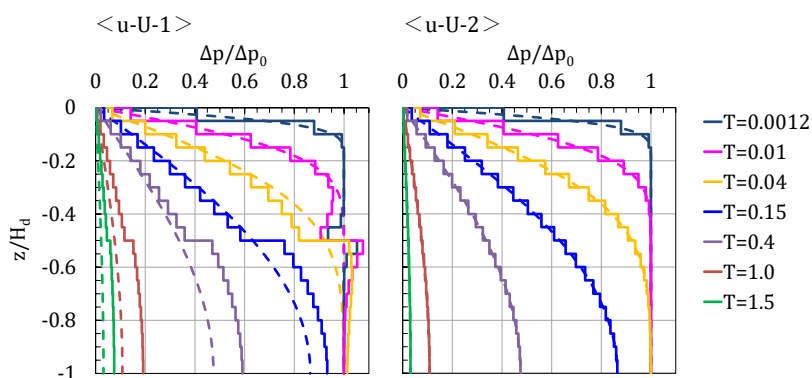


図3 過剰間隙水圧比の深度分布(実線:数値解, 破線:理論解)

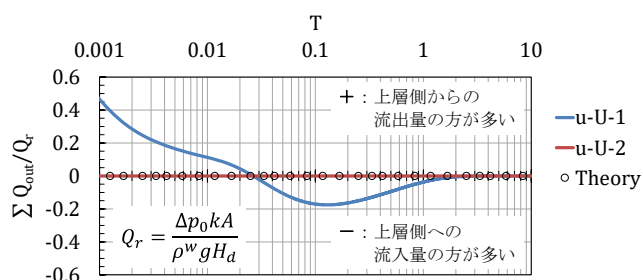


図4 地層境界上の流量の収支

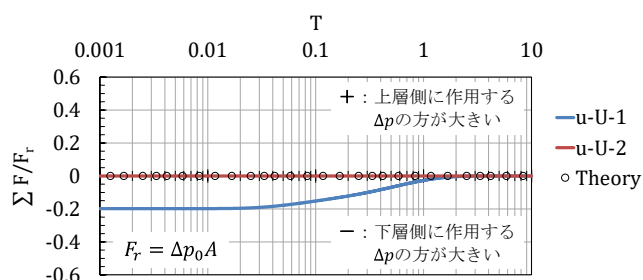


図5 地層境界上の過剰間隙水圧に伴う節点力の合計

6. まとめ 本研究においては、著者らが提案する u-U 定式化に基づく有限要素解析手法を示し、間隙率が地層境界で不連続に変化する1次元飽和弾性土柱モデルの圧密解析に適用した。その結果、間隙率マトリックスの導入によって地層境界上の流量と間隙水圧が常に連続し、平均圧密度等の数値解は Terzaghi による理論解とよく一致することが確認された。提案手法は圧密解析においても実用性の高い手法であると言える。

参考文献 1) Zienkiewicz and Shiomi: Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical solution, International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, Vol.8, pp.71-96, 1984. 2) 宇野・船原: 二相系定式化の違いが間隙率の異なる飽和互層地盤の地震時挙動に及ぼす影響, 令和2年度土木学会全国大会第75回年次学術講演会, III-136, 2020. 3) 宇野・船原: 二相系 u-U 定式化に基づく水-土連成有限要素解析の精度向上, 大成建設技術センター報, 第55号, 34, 2022.