

渦動粘性項を有する運動量式の跳水解へのシグモイド関数の適用について

フェロー会員 ○細 田 尚

京都大学 正会員 音田 慎一郎

北見工業大学 正会員 白井 秀和

1. 目的

渦動粘性項を考慮した単純な1次元運動量方程式には、共役水深間で急激に変化する跳水の水面形を表現する解析解が存在することが知られている¹⁾。その解析解は位置座標を x 、水深を h とすると $x = x(h)$ の形式で表されるため数学的な取り扱いが難しい。そこで細田等²⁾は水深を指数関数の和で表現する $h = h(x)$ の形の近似解を提案した。本研究の目的は、指数関数をより自由度の高いシグモイド関数に変更することで近似解の精度を向上させることである。

2. 一次元運動量式とその解析解

渦動粘性項を考慮した単位幅に対する一次元運動量式を記述すると式(1)となる。

$$\frac{d}{dx} \left(hU^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) = \frac{d}{dx} \left(D_m h \frac{dU}{dx} \right) \quad (1)$$

ここに、 x は空間座標、 h は水深、 U は水深平均流速、 g は重力加速度、 D_m は渦動粘性係数を表す。

連続式は式(2)で与えられる。また渦動粘性係数の評価式として式(3)を用いる。

$$hU = q = \text{一定} \quad (\text{単位幅流量}) \quad (2)$$

$$D_m = \alpha q \quad (3)$$

無次元変数 $x' = x/h_1$ 、 $h' = h/h_1$ (h_1 は跳水の上流

側の水深)を用いて運動量方程式を記述すると式(4)となる。

$$\frac{dh'}{dx'} = -A(h' - h_1')(h' - h_2')(h' - h_3'), \quad A = \frac{1}{2\alpha Fr_1^2} \quad (4) \quad h_1' = 1, h_2' = \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right) / 2, h_3' = \left(-\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right) / 2 \quad (5)$$

ここに、 Fr_1 は上流側のフルード数を表す。

式(4)には三つの対数関数の和で表される $x = x(h)$ の形式の解析解がある¹⁾。それを $\alpha = 0.05$ 、 $Fr_1 = 1.2$ として図示すれば図-1 となる。

式(6)に示すように水深 h を限界水深 $h_c = Fr_1^{2/3}$ とそれからの偏差に分ける。式(6)を式(4)に代入して δh に関する関係式を導くと式(7)となる。ただし、以後簡単のため無次元量を示す $'$ を省略する。

$$h = h_c + \delta h \quad (6) \quad \frac{d\delta h}{dx} = D_0 + D_1\delta h + D_2\delta h^2 + D_3\delta h^3 \quad (7)$$

ここに、 D_0, D_1, D_2, D_3 は次式で与えられる。

$$D_0 = \frac{1}{\alpha} \left\{ Fr_1^{2/3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{Fr_1^2} \right) - \frac{3}{2} \right\}, D_1 = \frac{1}{\alpha} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{1}{Fr_1^{2/3}} + \frac{1}{2} \frac{1}{Fr_1^2} + 1 \right\}, D_2 = -\frac{1}{\alpha} \frac{3}{2} \frac{1}{Fr_1^{4/3}}, D_3 = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} \frac{1}{Fr_1^2} \quad (8)$$

3. シグモイド関数を用いた近似解の導出

細田等²⁾は $h = h(x)$ の形式の式(9)で表される近似解を導いた。(式(9)は $x \geq 0$ に対する近似式。また文献2)では二次の項まで考慮しているが簡単のため一次近似の場合で説明する。)

$$\delta h = R_0 + R_1 \exp(\gamma_1 x) + \dots \quad (9)$$

キーワード 水面形解析, 運動量式, 渦動粘性項, 跳水, シグモイド関数

連絡先 細田 尚 E-mail: hosoda.takashi.82c@st.kyoto-u.ac.jp

その際、式(9)の三つの未知定数を定めるため、次式で与えられる $x=0$ と $x \rightarrow +\infty$ の δh の境界条件、および $x=0$ の一階微分の条件式を用いた。

$$\text{B.C. } x=0: \delta h = R_0 + R_1 = 0, \quad d\delta h/dx = \gamma_1 R_0 = D_0, \quad x \rightarrow +\infty: R_0 = \frac{\sqrt{1+8Fr_1^2}-1}{2} - Fr_1^{2/3} \quad (10)$$

しかし、式(9)を式(7)に代入し $\exp(\gamma_1 x)$ の係数を 0 と置くことで得られる γ_1 を定める別の関係式は用いていない。

そこで本研究では、 $x \geq 0$ の領域で成立すべき条件式を最低限満足する関数として式(11)で与えられるシグモイド関数を考え、運動量式の近似解を導出する。式(9)のパラメータの数は 3 であり式(11)は 4 である。

$$\delta h = S_0 + \frac{S_1}{1 + T_1 \exp(\gamma_1 x)} \quad (11)$$

式(10)に対応する境界条件は式(11)の場合次の三式で与えられる。

$$\text{B.C. } x=0: \delta h = S_0 + \frac{S_1}{1+T_1} = 0, \quad d\delta h/dx = \frac{-\gamma_1 S_1 T_1}{(1+T_1)^2} = D_0, \quad x \rightarrow +\infty: S_0 + S_1 = R_0 \quad (12)$$

式(12)の内 $x=0$ の境界条件を整理すると式(13)が得られる。

$$S_0^2 - \frac{D_0 S_1}{\gamma_1} + S_0 S_1 = 0 \quad (13)$$

次に、 $F_1 = 1 + T_1 \exp(\gamma_1 x)$ とおいて式(11)を基礎式(7)に代入すると次式となる。

$$-\frac{\gamma_1 S_1 T_1}{F_1^2} \exp(\gamma_1 x) = D_0 + D_1 \left(S_0 + \frac{S_1}{F_1} \right) + D_2 \left(S_0 + \frac{S_1}{F_1} \right)^2 + D_3 \left(S_0 + \frac{S_1}{F_1} \right)^3 \quad (14)$$

両辺に F_1^3 を乗じて整理し $\exp(\gamma_1 x)$ の係数をゼロと置くと式(15)になる。定数項の係数は恒等的にゼロになる。

$$-\gamma_1 S_1 = 3Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \quad (15)$$

ここに、 Y_1, Y_2, Y_3 は次式で定義される。

$$Y_1 = D_0 + D_1 S_0 + D_2 S_0^2 + D_3 S_0^3, Y_2 = D_1 S_1 + 2D_2 S_0 S_1 + D_3 S_0^2 S_1, Y_3 = D_2 S_1^2 + 3D_3 S_0 S_1^2 \quad (16)$$

式(13)、式(15)と $S_0 + S_1 = R_0$ を連立して解くことにより式(11)中の 4 つのパラメータを計算することができる。

4. 計算結果の考察

$\alpha=0.05$, $Fr_1=1.2$ として 4 つのパラメータを計算した後水面形を図示したものが図-2 である。図中には図-1 に示した解析解も表示しており、両者はよく一致しており、シグモイド関数を用いた近似解は解析解をよく再現していると考えられる。

5. おわりに

渦動粘性項を考慮した 1 次元運動量方程式にシグモイド関数を用いて跳水を表現する近似解を導きその適

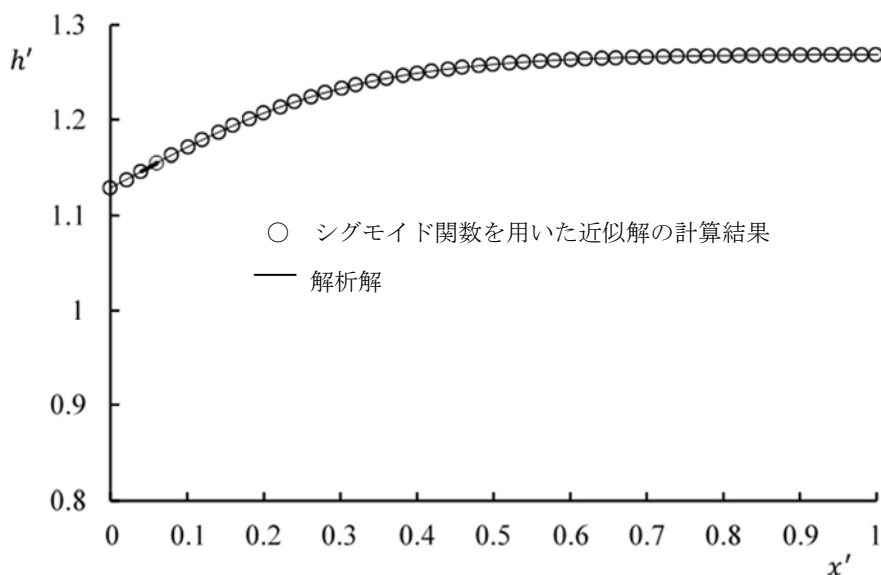


図-2 シグモイド関数を用いた計算結果

合性を検証した。近似解を基底関数として波状跳水解を導出するには近似解の精度を向上させる必要があるため、2 次のシグモイド関数を用いた高精度化の検討を行いたい。

参考文献 1) 細田尚・Langhi, M., 簡易な水深積分モデルによる跳水部の水面形の再現解析について, 土木学会論文集 B1 (水工学), 69 巻, 4 号 pp.I_883-I_888, 2013. 2) 細田尚・THIN THWE THWE・CASTRO-ORGAS, O.・音田慎一郎・白井秀和, 渦動粘性項を考慮した運動量方程式による跳水部の水面形の近似解, 第 72 回土木学会年次学術講演会講演概要集, II-129, 2017.