

拡張カルマンフィルタを用いた安全性指標および部分安全係数算定に関する基礎研究

東京都市大学 正会員 丸山 収

1. はじめに

信頼性設計法では、安全性指標および目標安全性指標を満足する部分安全係数が用いられている¹⁾。安全性指標 β は、AFOSM 法によると性能関数 $g(\mathbf{x})$ が非線形式で与えられる場合に、 $g(\mathbf{x}_0)=0$ となる破壊点 $\mathbf{x}_0$ まわりで線形化された性能関数の平均値と標準偏差により求められる。一方 1 次ガウス近似法による部分安全係数の算出は、目標安全性指標 β_a を満足する $g(\mathbf{x}_a)=0$ となる破壊点 $\mathbf{x}_a$ を求めることと解釈される。本研究は拡張カルマンフィルタを用いて、単一モードの性能関数 $g(\mathbf{x})$ の破壊点を求める手法により、安全性指標および目標安全性指標を満足する部分安全係数の算定を行っている。

2. 安全性指標の算出

確率変数ベクトル $\mathbf{x}^T=[x_1, x_2, \dots, x_n]$ が正規分布に従い、互いに相関を有するものとする。そして平均値ベクトルを $\bar{\mathbf{x}}$ とすると共分散行列 $\mathbf{C}_x$ は、次式となる。

$$\mathbf{C}_x = E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T] \quad (1)$$

構造物が破壊または安全であるということを性能関数 $g(\mathbf{x})$ により記述し、安全性指標を算出することを考える。性能関数は、確率変数ベクトル $\mathbf{x}$ の関数であり以下のよう

$$g(\mathbf{x}) > 0 \text{ 安全}, \quad g(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ 破壊} \quad (2)$$

破壊点 $\mathbf{x}_0^T=[x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$ の近傍で性能関数を 1 次項までのテーラー展開により線形化し、 $g(\mathbf{x}_0)=0$ であることを考慮すると次式を得る。

$$g(\mathbf{x}) \doteq (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{G}_0 \quad (3)$$

$$\text{ここで, } \mathbf{G}_0^T = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right]_{\mathbf{x}_0}$$

式(3)より、性能関数 $g(\mathbf{x})$ の平均値と分散値を求める。

$$E[g(\mathbf{x})] = \bar{g}(\mathbf{x}) = (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{G}_0 \quad (4)$$

$$E[(g(\mathbf{x}) - \bar{g}(\mathbf{x}))^2] = \sigma_g^2 = \mathbf{G}_0^T \mathbf{C}_x \mathbf{G}_0 \quad (5)$$

式(4)と式(5)から、安全性指標 β は次式で求められる。

$$\beta = \frac{\bar{g}(\mathbf{x})}{\sigma_g} = \frac{(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{G}_0}{(\mathbf{G}_0^T \mathbf{C}_x \mathbf{G}_0)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

3. 拡張カルマンフィルタによる破壊点の直接探索

式(6)より、1 次の線形近似をした性能関数 $g(\mathbf{x})$ に対する安全性指標が与えられることを示した。その際破壊

点 $\mathbf{x}_0$ および破壊点におけるヤコビアン行列 $\mathbf{G}_0$ が未知である。そのために、破壊点の探索を行いながら式(6)の収束計算を行うための各種アルゴリズムが提案されている。本研究では安全性指標の計算をラグランジェの未定乗数法としてとらえた Shinozuka²⁾の研究を参考にしている。Shinozuka は、次式で与えられる評価関数の制約条件付最小化問題の最小値が、安全性指標 β と等価であるということを示している。

$$\gamma(\mathbf{x}) = \left[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件} \quad g(\mathbf{x}) = 0 \quad (7)$$

式(7)で与えられる制約条件付最小化問題にラグランジェの未定定数法を用いる。

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \left[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right]^{\frac{1}{2}} + \lambda g(\mathbf{x}) \rightarrow \text{最小} \quad (8)$$

ここで、 λ はラグランジェの未定定数である。

式(8)の極小点において $\partial L / \partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\partial L / \partial \lambda = 0$ となることを用い、式(7)の最小値を与える $\mathbf{x}$ を破壊点 $\mathbf{x}_0$ とすると次式が得られる。

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \frac{(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{G}_0}{(\mathbf{G}_0^T \mathbf{C}_x \mathbf{G}_0)^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

式(9)より $\beta = \gamma(\mathbf{x}_0)$ であり、式(6)で与えられる安全性指標と一致することが分る。

本研究では、式(7)を参考にして、目標安全性指標 β_a を満足する破壊点 $\mathbf{x}_a^T=[x_1^a, x_2^a, \dots, x_n^a]$ を求めるための 2 次形式評価関数の制約条件付最小化問題を考える。

$$\gamma'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件} \quad g(\mathbf{x}) = 0 \quad (10)$$

式(10)は式(7)と比較すると以下の関係がある。

$$\gamma'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \gamma(\mathbf{x})^2 \quad (11)$$

次に、式(10)の最小値を与える破壊点 $\mathbf{x}_a$ が目標安全性指標 β_a を満足するための制約条件として式(11)を考慮して次式を加える。

$$\gamma'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \beta_a^2 \quad (12)$$

式(10)は制約条件 $g(\mathbf{x})=0$ のもとで、 $\gamma'(\mathbf{x})$ の最小化を行っている。一方、式(12)は、 $\gamma'(\mathbf{x})$ が目標安全性指標 β_a を満足するための制約条件である。従って式(12)を考慮しなければ、 $g(\mathbf{x}_0)=0$ を満足する破壊点 $\mathbf{x}_0$ により式(11)の最小値により、安全性指標 $\beta = \sqrt{2\gamma'(\mathbf{x}_0)}$ が求めら

れる. さらに式(12)を考慮すると, $g(\mathbf{x}_a)=0$ を満足する破壊点 $\mathbf{x}_a$ が求められる. 部分安全性係数には, 公称値 x_q または平均値 $\bar{x}$ による設計式が用いられるが, 破壊点 $\mathbf{x}_a$ が求められると, 例えば平均値に対する部分安全性係数は, $\mathbf{x}_a=[\gamma_1\bar{x}_1, \gamma_2\bar{x}_2, \dots, \gamma_n\bar{x}_n]$ により求められ, 目標安全性指標の充足度は $\hat{\beta}_a=\sqrt{2\gamma'(\mathbf{x}_a)}$ により確認される.

紙面の都合上, 拡張カルマンフィルタの詳細は省略するが, 最も重要となる状態方程式および観測方程式の定式化について述べる.

式(10)に対して, 最小化問題にラグランジェの未定定数法を適用する.

$$L'(\mathbf{x}, \lambda') = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \lambda' g(\mathbf{x}) \quad (13)$$

式(13)を $\mathbf{x}$ と λ' で偏微分する.

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \lambda' \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda'} = g(\mathbf{x}) \quad (15)$$

式(13)の極小点では $\partial L'/\partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\partial L'/\partial \lambda' = 0$ となる,

状態方程式は, システムノイズを考慮せず確率変数ベクトル $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda']$ 次式で与える.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda' \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda' \end{bmatrix}_{i-1} \quad (16)$$

一方観測方程式に, 式(12)と式(14)および式(15)の最小値となる拘束条件を与える.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta_a^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \lambda' \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ g(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} + \mathbf{I}w \quad (17)$$

ここで, $\mathbf{I}^T = [1, 1, \dots, 1]$, w は, 平均値: 0, 分散: σ^2 のガウス性観測ノイズである.

式(16)における添え字 i は, 解が収束するまでバッチ処理で拡張カルマンフィルタアルゴリズムの繰り返し計算を行うことを意味している. 破壊点の探索に拡張カルマンを援用して解いているということであるが, 単純に状態方程式と観測方程式の定式化を行えば良いことになっている. 以下の試算例では, 観測方程式の微分項 $\partial g(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ を解析的に求めている. 精度の検証が必要であるが, 微分項を影響係数法で評価することで, 一般的な問題にも適用可能となっている.

4. 数値計算例

以下に示す最も基本的な性能関数および平均値を用いた設計基準式について, 提案手法の試算を行う.

性能関数: $g_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_2$

$$\text{設計基準式: } \gamma_a^1 \bar{x}_1 - \gamma_a^2 \bar{x}_2 \geq 0 \quad (18)$$

性能関数: $g_2(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{x_2} - 1$

$$\text{設計基準式: } \frac{\gamma_a^1 \bar{x}_1}{\gamma_a^2 \bar{x}_2} - 1 \geq 0 \quad (19)$$

なお, $x_1 \sim N(10, 2)$, $x_2 \sim N(8, 2)$ のガウス性確率変数として, 相関係数は $\rho = 0.0, 0.3, 0.6$ の3ケースを仮定した. 観測ノイズの分散値は, $\sigma^2 = 0.0001$ として与えた.

表-1 安全性指標の計算結果

性能関数	相関係数 $\rho_{1,2}$	安全性指標 β
$g_1(\mathbf{x})$	0	0.7071
	0.3	0.8452
	0.6	1.1180
$g_2(\mathbf{x})$	0	0.7071
	0.3	0.8452
	0.6	1.1803

表-2 部分安全性係数の計算結果

性能関数	相関係数 ρ_{x_1, x_2}	安全性指標 ($\beta_a = 2.5, \hat{\beta}_a$)	部分安全性係数 ($\gamma_a^1 = \frac{x_a^1}{\bar{x}_1}, \gamma_a^2 = \frac{x_a^2}{\bar{x}_2}$)
$g_1(\mathbf{x})$	0	(2.5, 2.5)	(0.646, 1.441)
	0.3	(2.5, 2.5)	(0.704, 1.369)
	0.6	(2.5, 2.5)	(0.776, 1.280)
$g_2(\mathbf{x})$	0	(2.5, 2.4)	(0.640, 1.433)
	0.3	(2.5, 2.1)	(0.597, 1.199)
	0.6	(2.5, 2.4)	(0.694, 1.180)

表-1に安全性指標の計算結果を示した. $g_1(\mathbf{x})$ および $g_2(\mathbf{x})$ は基本的に同一の性能関数である. また性能関数 $g_1(\mathbf{x})$ は線形関係式であるので, 得られる結果は1次近似の理論解で精度良い結果が得られている. 次に, 式(18)および式(19)に対して, 共通に目標安全性指標を $\beta_a = 2.5$ として部分安全性係数を求めた. 表-2には, 計算によって求められた安全性指標 $\hat{\beta}_a$ を示している. 概ね目標安全性指標を満足する部分安全性係数が求められている.

5. まとめ

今後の課題としては, 精度の検証, 確率変数が非正規性の場合, 性能関数が陽な関数形として与えられない場合および具体的な事例による検討を考えている.

参考文献 1)星谷勝・石井清: 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会 2)Shinozuka, M.: Basic Analysis of Structural Safety, ASCE, Vol.109, No.ST3, pp.721-740, 1983.