

加速度データを用いた構造モデル更新における 2 段階 MCMC 法による極値分布の評価

大阪大学大学院工学研究科 学生会員 ○四井 陽貴
(公財) 鉄道総合技術研究所 正会員 松岡 弘大
大阪大学大学院工学研究科 正会員 貝戸 清之

1. はじめに

社会基盤構造物に対して、画像や加速度センサなどによる測定データを用いて構造物の状態や損傷を定量的に評価する構造ヘルスマニタリング (SHM) の検討が進められている。構造モデルのパラメータをモニタリングデータに沿うように更新する構造モデル更新は、SHM を実現するうえで必要不可欠な要素である。特に、数値計算によるベイズ推定手法の一つであるマルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC 法) を用いた構造モデル更新の研究は近年多く行われている。

松岡ら¹⁾は MCMC 法による構造モデル更新において、パラメータ間の相関を考慮した同時事後確率密度関数の信頼区間下限値の評価手法を開発した。さらに、貝戸・松岡²⁾はより効率的なサンプリングを行うため、レプリカ交換 MCMC 法の適用を提案した。本研究では、列車通過時の最大加速度データを用いてモデル更新を実施したうえで、信頼区間下限値に対応するパラメータ部分空間での最大加速度の分布について考察した。

2. 検討内容

(1) データの諸元

対象とするデータは高速鉄道用 PC 箱桁橋で計測された加速度データである。支間中央の上り線側と下り線側にそれぞれ設置された加速度計により、列車通過時の加速度が測定された。30Hz ローパスフィルタ (LPF) 最大加速度では、桁全体曲げ 1 次モードが主要な振動成分であり、桁の動的挙動が梁モデルで近似できることが明らかとなっている。そこで、分析には 30HzLPF 加速度を用いた。通過列車には 6 両と 8 両が含まれており、最大加速度のデータとして 6 両通過時の 10 データ、8 両通過時 12 データの計 22 データが得られた。これらのデータを用いてモデル更新を実施した。

桁の構造モデルには、両端弾性支持梁の理論モデルを用いた。支間中央の最大加速度 $\alpha_M(v)$ は、式(1)のように構造モデルの未知パラメータベクトル $\theta = [EI, k_v, \xi]$ と列車速度 v の関数 F で表される。なお、 EI は曲げ剛性、 k_v は鉛直支持剛性、 ξ はモード減衰比をそれぞれ表す。

$$\alpha_M(v) = F(\theta, v) \quad (1)$$

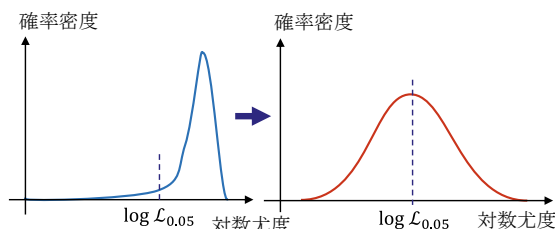


図-1 尤度の再定義

(2) 2 段階 MCMC 法の概要

弾性支持梁の理論モデルのパラメータを MCMC 法により推定する。列車通過時の最大加速度の測定データ集合を $D = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{S_n})$ 、対応する列車速度の測定データ集合を $V = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{S_n})$ とする。ここで S_n は測定データの合計サンプル数である。このとき測定データ集合 D が与えられたときの未知パラメータベクトル θ の生起確率はベイズの定理より以下の式(2)で与えられる。

$$P(\theta|D) \propto \mathcal{L}(D|\theta)P(\theta) \quad (2)$$

ここで $\mathcal{L}(D|\theta)$ は尤度を表し、 $P(\theta)$ は事前分布、 $P(\theta|D)$ は事後分布である。 $\propto$ は比例関係を示す。本研究では、測定データの理論モデルに対する誤差が分散 σ_1^2 の正規分布に従うと仮定した。このとき、尤度は以下の式(3)で定義される。

$$\mathcal{L}(D|\theta) = \prod_{s=1}^{S_n} N(\tilde{a}_s - F(\theta, \tilde{v}_s), \sigma_1^2) \quad (3)$$

本研究では、MCMC 法により $P(\theta|D)$ を推定する。MCMC 法によるサンプリングでは、パラメータの事後分布に加えて尤度分布も同時に得られる。尤度分布を用いて、図-1 に示すように下限 5% で最大となるように尤度を再定義する。対数尤度 $\log \mathcal{L}(D|\theta)$ について、正規分布を用いて尤度を再定義する場合、再定義後の尤度 $\mathcal{L}'(D|\theta)$ は尤度の信頼区間下限 5% 値 $\mathcal{L}_{0.05}$ を用いて以下の式で表される。

$$\mathcal{L}'(D|\theta) = N(\log \mathcal{L}(D|\theta) - \log \mathcal{L}_{0.05}, \sigma_2^2) \quad (4)$$

次に全体最適解の探索として、レプリカ交換モンテカルロ法 (REMC 法) を適用し、 $\log \mathcal{L}'(D|\theta)$ の下限 5% に対応するパラメータ部分空間 Θ を推定する。

REMC 法では、異なる温度パラメータ $T_s (s = 1, 2, \dots, S, T_1 < T_2 < \dots < T_S)$ をもつ複数のレプリカ分

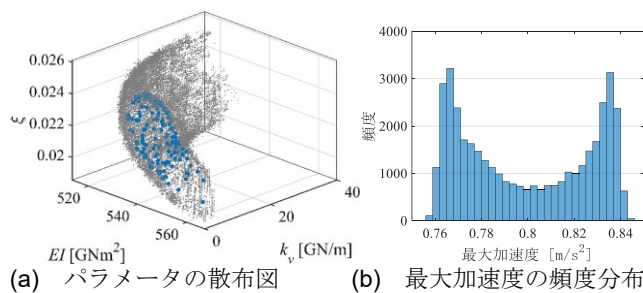


図-2 推定結果

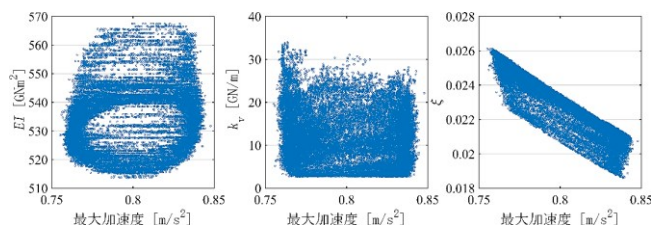


図-3 各パラメータと最大加速度の関係

布からそれぞれサンプルを生成し、隣り合うサンプルと交換することにより、多峰性分布のサンプリングを行う。ここで、合計 S 個のレプリカ分布の同時分布は、

$$P(\boldsymbol{\theta}) = P(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_S) = \prod_{s=1}^S P(\boldsymbol{\theta}_s | T_s) \quad (5)$$

であり、レプリカ分布ごとの並列計算により、それぞれ RW-MH 法を用いて $P(\boldsymbol{\theta}_s | T_s)$ からサンプリングされる。

REMC 法では、 $P(\boldsymbol{\theta}_s | T_s)$ に対して一般にギブス分布が仮定される。ただし、尤度下限空間 $\boldsymbol{\theta}$ の探索を目的とする本研究では、 $P(\boldsymbol{\theta}_s | T_s)$ を次の形で設定した。

$$P(\boldsymbol{\theta}_s | T_s) = \frac{1}{Z(T_s)} \cdot \mathcal{L}'(\boldsymbol{D} | \boldsymbol{\theta}_s)^{\frac{1}{T_s}} \quad (6)$$

ここで、 $Z(T_s)$ は正規化定数である。サンプリング過程でランダムに選ばれた k 番目のレプリカは、 $k+1$ 番目のレプリカと式(7)に示す確率 r で交換される。

$$r = \frac{P(\boldsymbol{\theta}_{k+1} | T_k) P(\boldsymbol{\theta}_k | T_{k+1})}{P(\boldsymbol{\theta}_k | T_k) P(\boldsymbol{\theta}_{k+1} | T_{k+1})} = \left\{ \frac{\mathcal{L}'(\boldsymbol{D} | \boldsymbol{\theta}_k)}{\mathcal{L}'(\boldsymbol{D} | \boldsymbol{\theta}_{k+1})} \right\}^{\frac{1}{T_{k+1}} - \frac{1}{T_k}} \quad (7)$$

3. 検討結果

MCMC 法では、事後分布への収束までのバーンインを 1,000 回とし、その後の 20,000 回を事後分布からのサンプルとして用いた。REMC 法では、レプリカ分布を 8 個設定し、それぞれ 5000 回計算した。これにより尤度の信頼区間下限 5% に対応するサンプルが 40,000 個得られた。尤度の再定義には、標準偏差 $\sigma_2 = 0.7$ の正規分布を使用した。

図-2(a)には REMC 法による信頼区間下限 5% のサンプルの補間結果を示す。青色の点は MCMC 法により得られた尤度下限 4.5%~5.5% のサンプルであり、黒点で示す REMC 法のサンプルによって MCMC 法のサンプルが補完されていることが確認できる。図-2(b)は最大加速度の頻度分布であり、最大加速度を大きく評価す

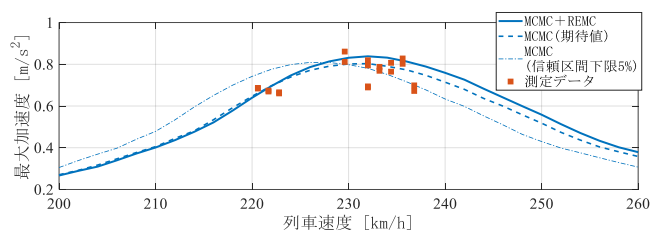


図-4 列車速度－最大加速度関係の比較

るサンプルと小さく評価するサンプルによる 2 つのピークが確認できる。

図-3 は REMC 法で得られたサンプルによる最大加速度と各パラメータの値の関係を示している。曲げ剛性 EI と支持剛性 k_v については、最大加速度との明確な関係は確認できない。一方で、モード減衰比 ξ は値が小さい場合に最大加速度が大きくなる傾向が確認できる。よって、図-2(a)に示す筒状の形状において、最大加速度を大きく算出するサンプルは下側に集中していると考えられる。安全側の評価を行う上ではこのような最大加速度が大きいサンプルのみ得られればよいため、パラメータ部分空間の下側のみを推定できる手法の構築が求められる。この点については今後の課題である。

図-4 は得られたパラメータを用いて算出した 8 両列車の列車速度－最大加速度関係である。実線は REMC 法で推定された信頼区間下限 5% のうち最大加速度が上位 5% のサンプルで得られた曲線である。点線で示す MCMC 法期待値で得られる曲線と比較すると、実測データに対して安全側に評価できていることがわかる。破線はパラメータの相関が無視された場合である各パラメータの信頼区間下限 5% を用いて得られた曲線である。パラメータの相関を考慮した場合の曲線とは異なり、共振速度にずれが生じていることが確認できる。

4. おわりに

本研究では、構造モデル更新における同時事後確率密度関数の信頼区間下限の評価を目的に、MCMC 法と REMC 法による 2 段階 MCMC 法を高速鉄道 PC 箱桁橋の加速度データに適用した。最大加速度を大きく評価するサンプルは、パラメータ部分空間においてモード減衰比が小さい箇所に位置することを確認した。また、信頼区間下限のサンプルを用いた構造モデルは、測定データに対して安全側での評価が可能となっていることを列車速度－最大加速度関係から確認した。

参考文献

- 1) 松岡弘大, 篠崎秀太, 貝戸清之: 不確実性を考慮した構造モデル更新および補強効果の信頼性評価: 高速鉄道橋の支点追加補強への適用, 土木学会論文集 A1, Vol.76, No.3, pp.560-579, 2020.
- 2) 貝戸清之, 松岡弘大: デュアルサンプリング法によるベイズ構造モデル更新へのレプリカ交換 MCMC 法の適用, 土木学会論文集, Vol.79, No.15, 22-15053, 2023.