

部分空間法に基づくシステム同定を用いたケーブルの固有振動特性の推定に関する研究

京都大学 学生員 ○姜 民九
京都大学 正会員 古川 愛子

1. 研究の背景と目的

斜張橋やニールセンローゼ橋等のケーブル構造では、ケーブルの維持管理が重要である。ケーブルの維持管理では、ケーブルの低次モードの固有振動数からケーブルの張力が推定されている。高次モードの固有振動数や低次モードの減衰定数およびモード形状を用いれば、張力だけでなく曲げ剛性、さらにはケーブルに設置されているダンパー諸元の推定も理論上可能である。しかし、低次モードの固有振動数の推定精度は高いが、高次モードの固有振動数や、次数に限らず減衰定数とモード形状の推定精度は低いことが知られている。本研究は部分空間法的一种であるN4SID法をケーブルに適用し、従来のフーリエ変換に基づく推定手法に比べて部分空間法の推定精度が優れているのかどうか、検討することを目的とする。

2. 部分空間法に基づくシステム同定

m 入力 l 出力離散時間線形時不変システムの状態空間表現は、次式で記述される。

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) + w(k) & (1) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) + v(k) & (2) \end{cases}$$

$x(k)$, $u(k)$ および $y(k)$ はそれぞれ k ステップ目における状態ベクトル、入力ベクトルおよび出力ベクトルである。 $w(k)$, $v(k)$ はそれぞれプロセスノイズおよび観測ノイズである。 A_d , B_d , C_d , D_d はシステム行列である。式(1)は状態方程式であり、式(2)は出力方程式である。システム同定は、入力ベクトル $u(k)$ と出力ベクトル $y(k)$ からシステム行列を推定する。

構造物の運動方程式を状態空間表現に変換するとき、システム行列は以下のように表される。

$$A_d = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \Delta t\right) \quad (3)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$D_d = 0 \quad (5)$$

M, C, K は質量、減衰、剛性行列、 C_d は計測する応答の番号と解析モデルの自由度番号との対応関係から

決まる行列である。構造物の j 次モードの固有振動数 f_j , 減衰定数 h_j , モード形状 ϕ_j は行列 A_d の j 次の固有値 λ_d^j , 固有ベクトル V_d^j , サンプリング周期 Δt および行列 C_d を用いて以下のように表される。

$$f_j = \frac{\text{Im}\{\log(\lambda_d^j)\}}{2\pi\Delta t} \quad (6)$$

$$h_j = \frac{-\text{Re}(\log(\lambda_d^j))}{\sqrt{\{\text{Re}(\log(\lambda_d^j))\}^2 + \{\text{Im}(\log(\lambda_d^j))\}^2}} \quad (7)$$

$$\phi_j = C_d V_d^j \quad (8)$$

以上のように、得られたシステム行列を用いてケーブルの固有振動特性が推定できる。

3. 数値実験による妥当性の検証

長さ 50m, 線密度 30.1 kg/m, 張力 3300 kN, 曲げ剛性 106 kN・m² の斜張橋ケーブルを対象とし、ハンマー打撃によるケーブルの加速度時刻歴から固有振動特性を推定することを想定した。図 1 に解析モデルを示す。両端固定のケーブルを 100 分割し、11 番節点を打撃点、11, 16, 21, 26 番節点を計測点とした。

固有値解析により算出した固有振動特性を真値とする。動的解析により算出したケーブルの加速度時刻歴を部分空間法に入力することによって推定された固有振動特性と、加速度フーリエスペクトルから読み取った固有振動特性の推定精度を比較することで部分空間法の妥当性を検証する。本稿では固有振動数とモード形状の推定結果の比較を示す。

図 2 は固有振動数の推定誤差（無次元）の比較である。部分空間法（N4SID）は高次モードまで推定精度が高いのに対し、フーリエスペクトルによる読み取り結果は次数が上がるほど精度が悪化している。

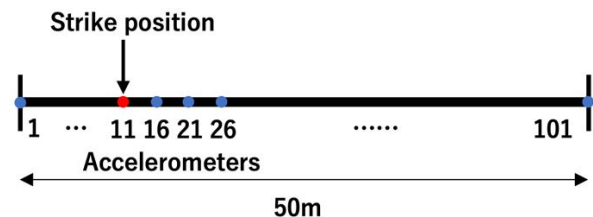


図 1 斜張橋ケーブルモデル

キーワード 部分空間法, システム同定, 固有振動特性, ケーブル, 加速度フーリエスペクトル
連絡先 〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂 TEL 075-383-3252

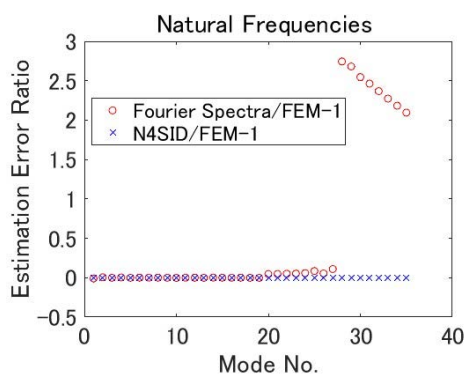


図2 固有振動数の推定精度の比較 (数値実験)

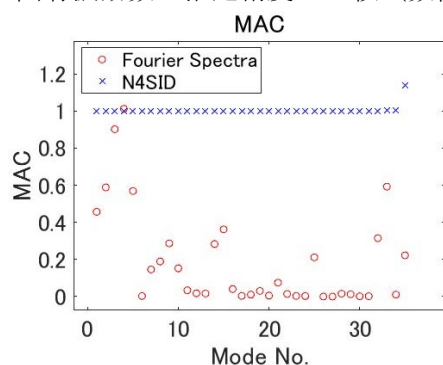


図3 モード形状の推定精度の比較 (数値実験)

図3はモード形状の推定精度の比較であり、縦軸は式(9)に示すモード信頼性評価基準(MAC)である。

$$MAC(\phi_A, \phi_B) = \frac{|\{\phi_A\}^T \{\phi_B\}|^2}{(\{\phi_A\}^T \{\phi_A\})(\{\phi_B\}^T \{\phi_B\})} \quad (9)$$

ϕ_A と ϕ_B はモード形状の推定値および理論値である。2つのモード形状が完全に一致している場合は1、直交している場合は0の値をとる。図3より部分空間法(N4SID)のMACはほぼ全てのモードで1であり、推定精度が高いことが読み取れる。

4. 実橋実験による妥当性の検証

実際のニールセンローゼ橋の2ケーブルの振動実験結果¹⁾を用いて検証を行った。図4にケーブル模式図と打撃点および計測点を示す。2ケーブルは交点クランプで連結されており、一体となって振動する。ケーブル1は長さ18.297m、張力378.76kN、曲げ剛性83.61kN・m²、ケーブル2は長さ16.775m、張力383.61kN、曲げ剛性82.40kN・m²である。両ケーブルとも定着部から交点クランプまでの長さは11.163m、線密度は17.58 kg/m、交点クランプの質量は19kgである。張力と曲げ剛性は、交点クランプを取り外して2ケーブルを独立に振動させたときの振動特性から推定した値で、それ以外は設計値である。固有値解析により求めた固有振動特性を真値と仮定する。

図6および図7に部分空間法による推定結果とフーリエスペクトルから読み取った結果の比較を示す。

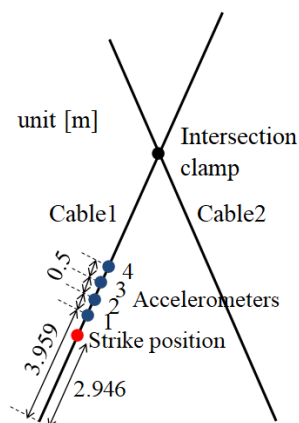


図4 ケーブル模式図

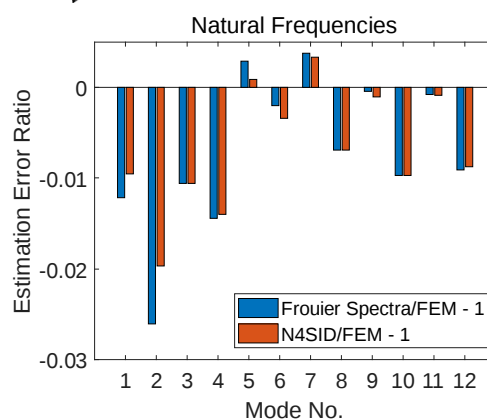


図5 固有振動数の推定精度の比較 (実橋実験)

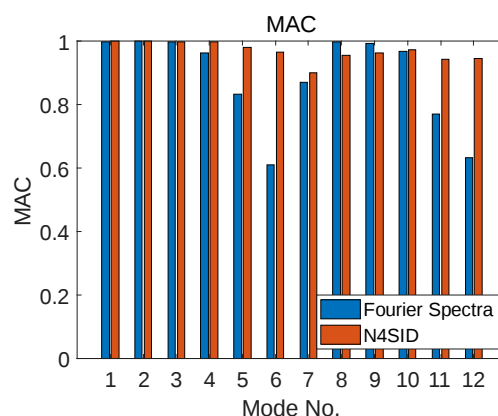


図6 モード形状の推定精度の比較 (実橋実験)

数値実験ほど差は顕著でないが、部分空間法(N4SID)の方が推定精度の高いことが確認された。

5. 結論

本研究では、ケーブルを対象に部分空間法(N4SID)を用いた固有振動特性の推定精度の検証を行った。数値実験、実橋実験のいずれにおいても、フーリエスペクトルから読み取る手法に比べて推定精度が高いことを確認した。

参考文献

- 1) A. Furukawa et al.: Method for estimating tension of two Nielsen-Lohse bridge cables with intersection clamp connection and unknown boundary conditions, *Frontiers in Built Environment*, Vol. 8, Article 906871, 2022.