

有限要素解析における線形化仮想応力を利用した非線形解析手法に関する基礎検討

防衛大学校 正会員 ○本山紘希

海洋研究開発機構 フェロー会員 堀宗朗

1. はじめに

土木構造物はコンクリートや土といった複雑な材料非線形性を有する材料で構築されることが多い。地震荷重に対する設計では比較的大きな力を考慮するため、設計時の構造解析において非線形解析が必要となる。複雑な材料非線形性を有する材料からなる構造の解析は非線形解析手法に工夫を要することが知られている。著者らも大規模コンクリート構造物の地震応答解析を対象として非線形解析手法の検討を行ってきた^{例えば1)}。これらの検討は一定の成果をおさめたものの、より安定して収束を得られる非線形解析手法を構築することで、構造解析の信頼性がさらに高まるものと考えられる。そこで、本研究では、安定性向上を目的とした新たな非線形解法を提案し、その挙動に関して基礎的な検討を実施する。提案する非線形解析手法の特徴は、弾塑性力学で導出する変位増分の支配方程式に対して線形仮想応力を導入して展開した別の支配方程式を基本とする点である。これにより、弾性剛性のみを使用した計算を可能とすることで非線形解析の安定性に期待できるものである。

2. 提案する非線形解析手法

次に示す降伏関数 F を使用する弾塑性材料を考える。

$$F = \sigma - f(\epsilon) \quad (1)$$

ここで、 σ および ϵ はそれぞれ応力テンソルおよびひずみテンソルである。降伏時は $F = 0$ を満たすため、関数 f は降伏時の応力とひずみの関係を表す。力の釣合い条件は、

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (2)$$

であるため、 $\epsilon = \text{sym} \nabla u$ も考慮する（ $\text{sym}(\cdot)$ は対称テンソルを取ることを意味する）と本材料の降伏時の変位の支配方程式は以下である。

$$\nabla \cdot f(\text{sym} \nabla u) = 0 \quad (3)$$

本支配方程式を元に、通常通り、弾塑性テンソル c^{EP} を考慮した変位増分の支配方程式を導くと次式となる。

$$\nabla \cdot (c^{EP} : \text{sym} \nabla du) = 0 \quad (4)$$

式(4)に対応して、通常非線形解析（ニュートン法）では、収束計算の各ステップ（ k ステップ目）に、離散化した各点の変位増分と残差力に関して次の行列形式の方程式を考える。

$$[K_k^{EP}][du_k] = [dr_k] \quad (5)$$

$[K_k^{EP}]$ は弾塑性テンソルから計算した全体剛性行列であり、 $[du]$ および $[dr]$ はそれぞれ変位ベクトルと残差力ベクトルである。残差力がゼロとなるように収束計算が行われる。

提案する手法では、下記の線形化仮想応力 σ^* を考える。

$$\sigma^* = c : \epsilon - f(\epsilon) = c : \nabla u - f(\text{sym} \nabla u) \quad (6)$$

ここで、 c は弾性テンソルである。式(6)を用いると、式(3)は次のように展開できる。

$$\nabla \cdot (c : \nabla u) - \nabla \cdot \sigma^* = 0 \quad (7)$$

増分形式およびそれに対応した非線形解析における行列形式の方程式は次のようになる。

$$\nabla \cdot (c : \nabla du) - \nabla \cdot d\sigma^* = 0 \quad (8)$$

$$[K_k][du_k] + [B][d\sigma_k^*] = [dr_k] \quad (9)$$

ここで、 $[K_k]$ は弾性テンソルから計算した全体剛性行列、 $[B]$ は微分を与える行列である。式(9)で線形化仮想応力を使用して行列形式の方程式を構築するため、本手法は、要素（積分点）の計算において、剛性や応力

キーワード 非線形解析手法, 線形化仮想応力

連絡先 〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校 TEL 046-841-3810

の更新の他に σ^* および $d\sigma^*$ の計算が必要となる。上述の式で表される非線形解析のイメージを一軸の応力とひずみの関係（相当応力と相当ひずみの関係）として図1に示す。

ここまで示した方法は、山口らの方法と類似の方法である²⁾。一方で、山口らの方法では、式(9)の左辺第二項の値の求め方が明示的に示されていなかった。本研究の方法は、次式で $d\sigma^*$ が与えられるため、式(9)の左辺第二項が解析の途中で明示的に与えられる。

$$d\sigma^* = -\sigma^* + c: (\epsilon + d\epsilon^*) - f(\epsilon + d\epsilon^*) \quad (10)$$

ただし、

$$d\epsilon^* = f^{-1}(c: (\epsilon + d\epsilon) - \sigma^*) - \epsilon \quad (11)$$

である。関数 f の逆関数の計算が必要であるため、繰返し計算または近似が必要となるが、要素（積分点）における応力とひずみの6自由度の計算であるため、全体系での非線形解析に比べれば安定しやすいと考えられる。弾性テンソルから構築した剛性行列のみを使用することで解析全体の安定性も期待できる。なお、著者らが特に対象としてきた大規模解析では、たとえ要素ごとの計算コストが増えたとしても、線形ソルバによる計算が減るのであれば、全体の計算コストの観点からは望ましい。要素ごとの計算はスケールし易い点からも、大規模計算に適した解析手法であることが期待できる。

3. 提案手法の挙動確認

一要素（1 m × 1 m × 1 m）のモデルを作成し、一軸の荷重を与える計算を行うことで、手法の挙動確認を行なった。対象とするのは、相当応力と相当ひずみの関係に下記の Ramberg-Osgood 型の方程式を当てはめたものである。

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (11)$$

σ および ϵ は相当応力および相当ひずみであり、 ϵ_0 、 σ_0 および n は Ramberg-Osgood 型の方程式のパラメータである。簡易な計算であるため詳細な設定は省略する。従来の手法による計算と提案手法による計算を行い、荷重と変位の関係を重ねて描いたものを図2に示す。2つの手法で解が一致する結果が得られた。複数の要素を用いた検証も必要であるが、基本的な挙動は確認できたと考えられる。一方で、収束性（各ステップの繰返し計算の回数）に関しては、現状、式(10)と式(11)に近似計算を使用しているため、ニュートン法に劣る状況である。上式の高度化についても今後の課題である。

4. まとめ

線形化仮想応力を利用した非線形解析手法について提案し、簡単な挙動確認を行なった。今後、通常の構造解析での安定性の検証および高速化の検討を実施する。

謝辞 本研究のベースとなるソフトウェアとして FrontISTR を使用した。本研究の一部は JSPS 科研費 JP22K04299, JP18H03795 の助成を受けたものである。

参考文献

- 1) 本山ほか：詳細モデルによる大規模鉄筋コンクリート構造物の地震応答解析手法の開発と有効性に関する基礎検討，土木学会論文集 A2（応用力学），75 巻，2 号，pp.I_589-I_599，2019。
- 2) 山口ほか：等価介在物法を用いた弾塑性有限要素解析手法，土木学会論文集，No.556，pp.85-94，1997。

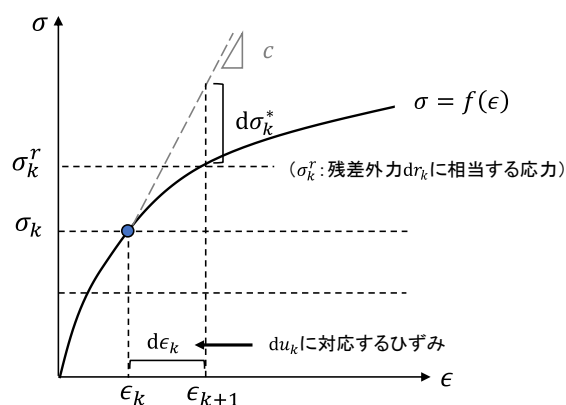


図1 非線形解析のイメージ

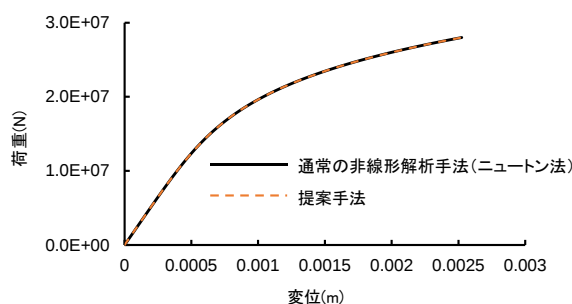


図2 提案手法の挙動確認と検証