

不連続き裂面を有する勾配損傷モデルの動的破壊問題への拡張

○東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 学生会員 平山 大悟
 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 学生会員 韓 霽珂
 東北大学災害科学国際研究所 正会員 森口 周二
 東北大学災害科学国際研究所 正会員 寺田 賢二郎

1. 序論

有限要素法を用いたき裂の発生・進展およびその分岐現象の数値解析を実現するために、様々な研究が行われてきたが、任意き裂の発生および進展・分岐現象までを記述可能な非局所連続体損傷モデルの1つである「Phase-field き裂モデル¹⁾」が注目を集めている。先行研究²⁾では、Phase-field き裂モデルに有限被覆法 (FCM) を適用することで、き裂進展経路は変分原理に基づくエネルギー最小化問題として求解し、進展した陰のき裂はFCMによって陽的に表現することを実現した。本研究では、材料における亀裂の発生から分離後の運動までを一貫して解析を行うため、先行研究に対して Newmark β 法を適用し時間離散化を行うことで、動的破壊問題へと拡張を行う。

2. 解析手法

2.1 Phase-field き裂モデル

Phase-field き裂モデルでは、Phase-field 近似を用いて拡散き裂を表す汎関数を定義することで、連続体内部における離散的なき裂面を近似的に表すことが可能となる。スカラー変数である Phase-field 変数 d が材料の損傷状態を表す損傷変数として用いられ、本研究で用いる AT2 モデルの場合、拡散き裂は以下のような指数関数形で与えられる。

$$d(x) = \exp\left(\frac{-|x|}{l_f}\right) \quad (1)$$

ここで、 l_f は拡散き裂の幅を表す正則化パラメータである。

弾性ひずみエネルギー密度と損傷エネルギー密度をそれぞれ Ψ^e , Ψ^f とし、エネルギー密度関数を次式のように定義する。

$$\Psi = \Psi^e(\mathbf{F}, d) + \Psi^f(d, \nabla d) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{F}$ は変形勾配であり、初期および現在配置の位置ベクトル $\mathbf{X}$ および $\mathbf{x}$ を用いて、 $\mathbf{F} := \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$ と定義する。変形及び損傷の支配方程式は、適当な外力エネルギー項および運動エネルギー項を考慮した次のエネルギー変化率のつり合い式から得られる。

$$\int_{\mathcal{B}_0} \dot{\Psi} dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} dA \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{B}$ および $\mathbf{T}$ は連続体に作用する物体力と平面力ベクトルである。

2.2 有限被覆法による空間離散化

有限被覆法 (FCM)³⁾ では、計算の対象領域の補間関数を定義する数学的領域 (数学被覆) と物理量を定義する物理領域 (物理被覆) の2つに分離して考える。これにより、有限要素の形状とは無関係に、き裂や異種材料の任意の不連続性を表現することが可能となる。

有限被覆法における空間離散化は、形式的には一般的な有限要素法と同様であり、式 (3) から減衰項を含む変位場および損傷場の残差力ベクトル $\mathcal{R}_{u_i}^I$, $\mathcal{R}_d^I$ は次式のように与えられる。

$$\mathcal{R}_{u_i}^I = - \int_{\mathcal{B}_0^n} \left(\rho_0 \ddot{u}_i^h N^I + \left(C_{ij}^h \dot{u}_j^h \right) N^I + P_{ia}^h \frac{\partial N^I}{\partial X_a} - \rho_0 g_i^h N^I \right) dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0^n} T_i^h N^I dA \quad (4)$$

$$\mathcal{R}_d^I = - \int_{\mathcal{B}_0^n} \left(- \frac{\partial g(d^h)}{\partial d} \mathcal{H}^{eh} N^I - \frac{G_c}{l_f} \left(d^h N^I + l_f^2 \frac{\partial d^h}{\partial X_a} \frac{\partial N^I}{\partial X_a} \right) \right) dV \quad (5)$$

ここで、 N^I は形状関数であり、 ρ , $g(d)$, G_c , $\mathcal{H}^{eh4}$ は連続体の質量密度、強度低減関数、破壊エネルギー、損傷を担保するための履歴変数である。また、 $\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ は人工的な減衰項である。なお、本研究では表面力は考慮しない。

2.3 Newmark β 法を用いた時間離散化

Newmark β 法は線形加速度法の拡張手法であり、任意の2つのパラメータ β, γ により近似した式を用いて、動的問題を時間方向に離散化する手法である。変位 $\mathbf{u}$, 速度 $\dot{\mathbf{u}}$, 加速度 $\ddot{\mathbf{u}}$ の関係は次式のように与えられ、式 (4) の加速度が時間離散化される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \end{aligned} \quad (6)$$

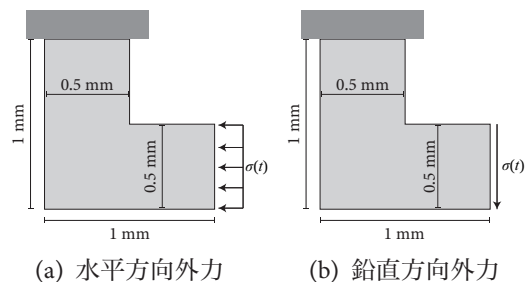


図-1 形状・境界条件

Key Words: 連続体損傷モデル, 有限被覆法, 動的破壊問題, き裂進展問題

〒 980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 災害科学国際研究所 4F S403-S404, TEL 022-752-2132, FAX 022-752-2133

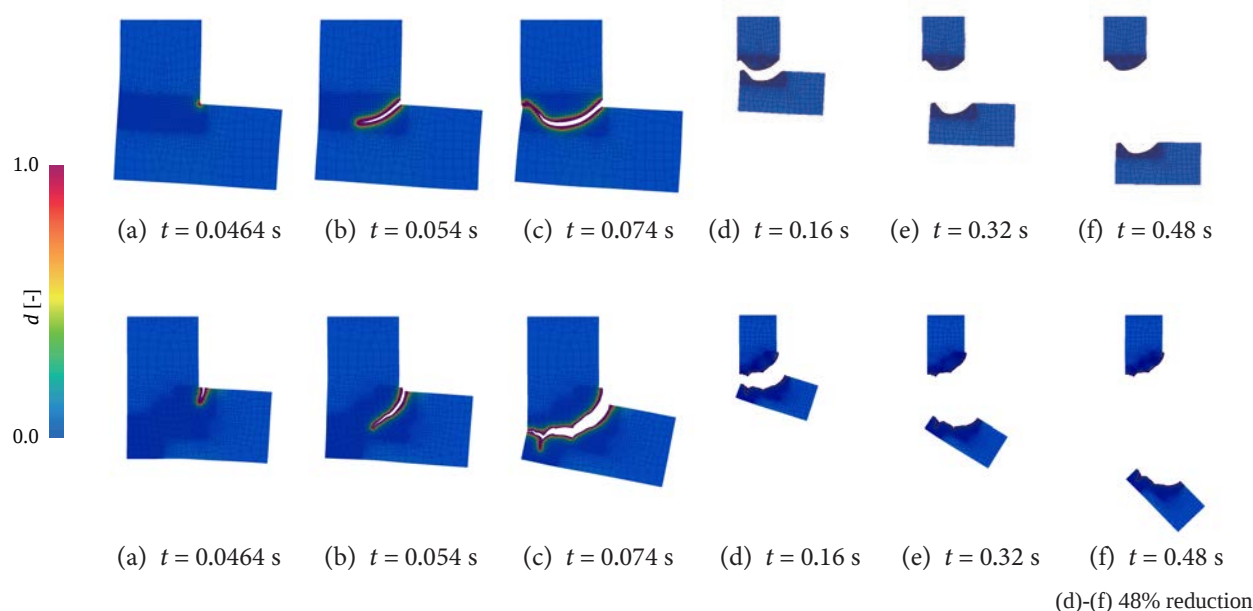


図-2 Snapshots of the crack evolutions and post-separation movements in horizontal (upper) and vertical (lower) loads

3. 数値計算例

数値計算例を通して、提案手法の性能を検証する。L字型の解析モデルを対象として、外力 $\sigma(t) = \sigma_0 \cdot f(t)$ を水平・鉛直方向に与える。 $\sigma_0 = 15 \text{ MPa}$ とし、 $f(t)$ は次式に示す通りとする。また、解析モデルの形状および境界条件は図-1に示すとおりである。

$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{0.005 \text{ s}}\right), & \text{if } 0 \leq t \leq 0.005 \text{ s} \\ 0, & \text{if } 0.005 \text{ s} < t \end{cases} \quad (7)$$

図-2に変形履歴およびPhase-field変数についてのコンター図を示す。この図から、水平に外力を与えた場合と鉛直に外力を与えた場合では、異なるき裂進展経路により部材が分離されたのち、それぞれ物体力により落下している様子が確認できる。水平方向外力では、部材の分離後は右方向に等速直線運動しながら落下している様子が確認できるが、鉛直方向外力では水平方向外力に比べ、き裂がより鉛直に近い向きに発生しており、部材の分離後は回転しながら落下していることがわかる。

また、動的破壊問題として数値解析を行なった本計算例では、き裂進展経路において湾曲や分岐が発生していることが確認される。外力は物体内部を応力波として伝搬するが、時間に依存して領域内の応力状態は変化しているため、引張応力により発生するき裂は応力状態の時間変化に依存しており、このようなき裂の湾曲や分岐が生じると考えられる。

これらの計算結果は、一般的な有限要素法で再現することが困難であり、提案手法がき裂の発生から分離後の運動までを適切に追跡していることから、既往手法に対する提案手法の優位性を主張することができる。

4. 結論

本研究では、任意の拡散き裂を表現するPhase-fieldき裂モデルに有限被覆法を適用した離散き裂によるき裂進展問題の解析手法について、動的解析問題へと拡張を行なった。具体的には、運動エネルギーを含めたエネルギーのつり合い式から、変位場と損傷場の支配方程式を導出し、有限被覆法による空間離散化を行ない、Newmark β 法を用いて時間離散化をすることにより、動的破壊問題の解析を可能にした。また、本手法の性能を確認するため、L字型解析モデルによる動的破壊問題の数値解析を実施した。結果として、動破壊問題におけるき裂の進展から分離後の挙動を適切に表現できた。今後は接触・摩擦項の導入や、3次元問題への拡張を課題とし、より精緻な構造物の破壊過程の予測を行うこととする。

参考文献

- 1) Miehe, C., Welschinger, F. and Hofacker, M.: Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 83, No. 10, pp. 1273–1311, 2010.
- 2) Han, J., Shintaku, Y., Moriguchi, S. and Terada, K.: A transition scheme from diffusive to discrete crack topologies at finite strain during the course of a staggered iterative procedure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2022.
- 3) Terada, K., Asai, M. and Yamagishi, M.: Finite cover method for linear and non-linear analyses of heterogeneous solids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, No. 9, pp. 1321–1346, 2003.
- 4) Miehe, C., Hofacker, M. and Welschinger, F.: A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45-48, pp. 2765–2778, 2010.