

物理偏微分方程式を考慮する機械学習 PINN の地盤圧密解析への適用

筑波大学大学院 学生会員 ○帷子 翔葵
 筑波大学 正会員 西尾 真由子
 山梨大学 正会員 宮本 崇
 東京大学 正会員 全 邦釘

1. はじめに

Physics-informed Neural Network (以下, PINN) は, Raissi らによって 2017 年に提唱された, 微分方程式で表される物理支配方程式を損失関数で制約条件として考慮して, 物理現象の順解析・逆解析を行うニューラルネットワークである¹⁾²⁾. 現時点では, Raissi らが扱った流体の非線形偏微分方程式など基礎物理問題を対象に求解やパラメータ推定における性能を調べる研究が多く, 工学問題の意思決定に資する現象の予測やパラメータ推定への適用性検証はまだ少ない. 近年の土木分野では構造物の建設や維持管理, 災害リスク評価や対応のため, 構造物全体の大規模な数値モデルを構築して, 想定外力に対する挙動解析や物性値など未知パラメータの推定を行う問題が多くなっている. その中でも著者らは, 地震や豪雨で発生する斜面崩壊で形成される河道閉塞天然ダムの挙動予測など, 大規模な地盤災害現場の予測や評価に関する数値解析への適用を検討している. そこで本研究では, この地盤問題への PINN 適用を念頭に, 第一段階の基礎検証として圧密方程式を対象に求解精度と計算コストに着目して PINN への検証を行った.

2. PINN の概要

PINN の基本的な構造は Fig. 1 のようになっている. 図中では地盤圧密方程式の形である拡散方程式を損失関数で考慮する偏微分方程式(PDE)として例に示しているが, この場合は, 時間 t と位置座標 x を入力で $u(t, x)$ が出力となるニューラルネットワーク (NN) を構築する. このとき, 出力 u に対して自動微分で時間や位置に対する偏微分を計算でき, 任意の (t, x) に対する偏微分方程式の代入値 $f(t, x)$ を計算できる. ここで $f(t, x) = 0$ となるときに, 物理支配方程式を満たすことになる. 損失関数は次式(1)に示すように, 初期条件と境界条件を考慮する項 MSE_u と, 偏微分方程式を満たす $f(t, x) = 0$ を考慮する項 MSE_f の和で表す.

$$Loss = MSE_u + MSE_f \quad (1)$$

ここで各項は

$$MSE_u = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |u(t_u^i, x_u^i) - u^i|^2 \quad (2)$$

$$MSE_f = \frac{1}{N_f} \sum_{j=1}^{N_f} |f(t_f^j, x_f^j)|^2 \quad (3)$$

であり, 式(2)の N_u は時間 t と位置 x の座標空間内で初期条件 $(0, x)$ と境界条件 $(t, 0)$ となる任意の点の数であり, 対象とする時間と位置領域で均等にそれぞれサンプリングした. 一方, 式(3)の N_f は偏微分方程式 $f(t, x) = 0$ を考慮する代入点 (t^j, x^j) の数であり, 解の対象とする (t, x) 領域から実験計画法でサンプリングして構成する. 本研究では, 準モンテカルロ法の Sobol 列でサンプリングを行った. そのうえで, 損失関数の最小化を行うようニューラルネットワークの学習を行う. 本研究では Matlab で PINN のコードを構築し, 9 層 20 ニューロンの構造として, 最適化法に Adam を適用しエポック 100 バッチサイズ 50 で学習を行った.

3. 圧密方程式の求解

本研究では, 上下両面が排水条件の深さ 5m の飽和粘土層に $P = 10$ kN で上載荷重が与えられた時を $t = 0$ sec として, 時間 t ($0 \leq t \leq 100,000$ sec)での過剰間隙水圧 u の変化を求める問題を対象とした³⁾. この支配方程式は, 次式(4)に示す Terzaghi の圧密方程式で, 初期条件 I.C.と境界条件 B.C.も下記のように記述できる.

$$f(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t} - c_v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$\text{B.C.: } u(t, 0) = 0, \quad u(t, 5) = 0 \quad \text{I.C.: } u(x, 0) = P$$

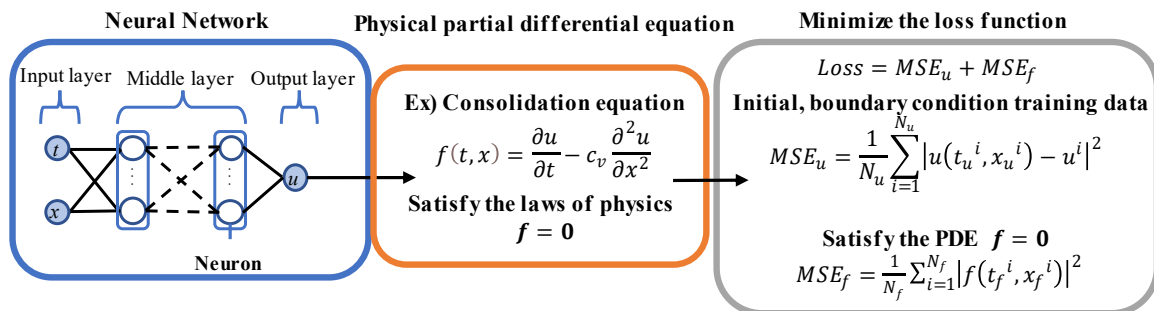


Fig. 1 Structure of PINN

キーワード PINN, 圧密方程式, 相似則, 数値モデル

連絡先 〒305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail : katabira.shoki.aw@alumni.tsukuba.ac.jp

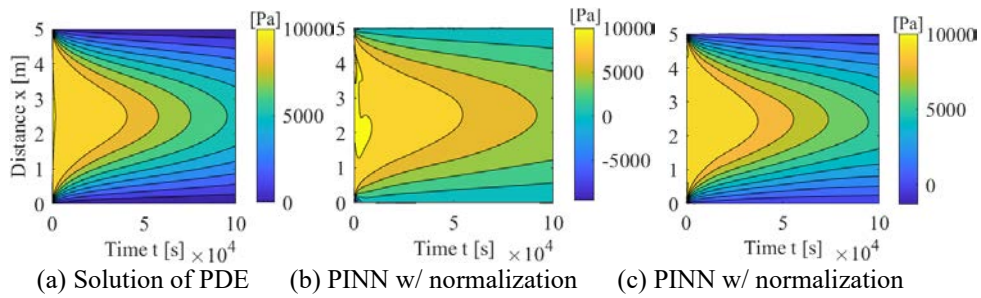


Fig. 2 PINN solution result after normalization

ここで、 u は過剰間隙水圧、 t は時間、 x ($0 \leq x \leq 5$ m) は粘土層深さ方向の位置、 C_v は圧密係数、 P は上載荷重である。圧密係数 C_v は粘性土で 2×10^{-5} m²/s に設定した。この偏微分方程式の過剰間隙水圧 $u(t, x)$ の差分法での求解結果を Fig. 2(a) に示す。これを PINN で導出することが目的である。

4. PINN による圧密方程式の求解結果

はじめに、式(4)でPINNの入力である時間 t と距離 x 、出力の過剰間隙水圧 u 、圧密係数 C_v を正規化せずにPINNを構築した。すると解空間全体で自明解0が出力され、適切な求解を行えなかった。そこで、これらの変数とパラメータを相似則で正規化することを考えた。例えば相似比を10,000とすれば、表1のように変換できる。これでPINNを構築するとFig. 2(b)のように求解を行えた。このとき、 $t=0$ でI.C.を考慮する点を50点、B.C.は $x=0, 5$ mに25点ずつで $Nu=100$ とし、コロケーションポイントは $N_f=10,000$ とした。しかしFig. 2(b)中で見られるように、特に $t=0$ secに近い領域、すなわち載荷直後の過剰間隙水圧 u が急峻に変化する領域でFig. 2(a)と整合する u の分布が得られず、特に $(t, x) = (0, 0)$ 、 $(0, 5)$ 近傍では負値を示した。

そこで次に、Fig. 3に示すように $t=0$ に近い領域でコロケーションポイントを集める傾斜配置での求解精度向上を考えた。解の対象空間 $(t, x) = ([0, 100,000], [0, 5])$ の $t=0$ 付近を領域A、空間全体を領域Bとし、各領域に対してコロケーションポイントを生成した。総点数 N_f を10,000に固定し、領域A点数と領域B点数の比率を変化させて、求解精度を比較した結果がFig. 4である。ここではAの領域を $t=0 \sim 10,000$ secと $t=0 \sim 5,000$ secの2パターンで検証した。求解精度は、解空間に 1000×500 で格子に配置した評価点座標でのPINN出力値と求解値で得る平均二乗誤差(MSE)で調べた。その結果、傾斜配置の効果は高く、特にA:Bが1:9や3:7のとき大きな求解精度の改善がみられた。

さらに、コロケーションポイント総数 N_f はPINNの学習効率に大きく影響することが、事前検討で把握できていた。

Table 1 Normalization of PDE parameters

Similarity ratio	1	10,000
Load P [Pa]	10,000	1
Time t [s]	0~100,000	0~10
Consolidation coefficient C_v [m ² /s]	0.00002	0.2

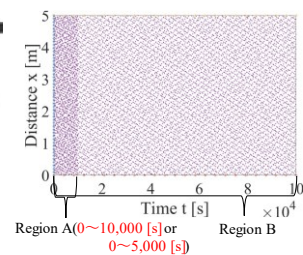


Fig. 3 Incline collocation points

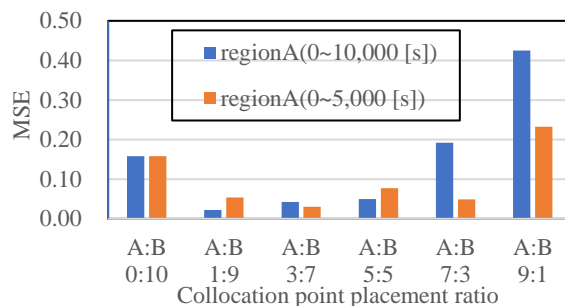


Fig. 4 Comparison of accuracy by tilted arrangement

そこで、傾斜配置による求解精度の向上効果を用いて N_f を減らして事で計算コストを抑えることを考えた。傾斜配置の領域は $t=0 \sim 5,000$ secとし、A:B=3:7と固定して、 N_f を変化させたときのMSEを調べた結果、 $N_f=5,000$ で $N_f=10,000$ と同等の精度を比較的高い安定性で得られた。

5. 結論

PINNを地盤圧密方程式の求解に適用し、相似則による正規化とコロケーションポイントの傾斜配置によって、求解精度の向上と計算コストの低減をはかれることを示した。今後はNNの出力に圧密係数 C_v を加えて、偏微分方程式の求解と同時にこの地盤物性値の推定を行う。また複数層の地盤圧密問題、より複雑な問題への適用を検討していく。

謝辞

本研究はJST ムーンショット型研究開発事業、グラント番号JPMJMS2032の支援を受けたものです。

参考文献

- 1) Raissi, M. et al.: Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations, *arXiv preprint arXiv:1711.10561*, 2017.
- 2) Raissi, M. et al.: Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational physics*, 378, 686-707, 2019.
- 3) 応用力学委員会逆問題小委員会, 珠玖ら: 圧密問題の逆解析-1-. ([http://tcu-yoshida-lab.org/Inverse_HP/pdf/ouyou_Shuku\(consolidation\).pdf](http://tcu-yoshida-lab.org/Inverse_HP/pdf/ouyou_Shuku(consolidation).pdf), 閲覧 2022/03/11)