

IGA の非圧縮性粘性流れ解析への適用性に関する基礎的検討

中央大学大学院 学生員 ○ 安井 太一
 中央大学大学院 学生員 吉田 也真都
 日本大学 正会員 長谷部 寛
 中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

IGA (Isogeometric Analysis)¹⁾²⁾ は医療分野, 自動車や精密機械の分野の数値解析において, 近年盛んに研究と適用が行われている手法である. IGA は CAD (Computer Aided Design) の形状表現に用いられる Spline 関数を基底関数として用いるため, CAD で描いた形状モデルから直接解析メッシュを作成することができる. そのため, メッシュの作成プロセスを削減でき, 曲線等も形状誤差なく表現することができる.

本研究では, IGA を用いた流体-構造連成解析手法の構築を目的とし, 本報告ではその基礎的研究として, 2 次元非圧縮性粘性流れのベンチマーク問題に対して NURBS 関数を用いた IGA を適用して解析を行い, 三角形 1 次要素を用いた有限要素法による結果との比較を行った. また, 計算精度と安定性の観点から, 補間用いる NURBS 関数の次数と積分点数の差異による計算結果の比較も行った.

2. 数値解析手法

(1) 定式化

2 次元非圧縮性粘性流体の支配方程式には, 以下に示す無次元化した Navier-Stokes の運動方程式と連続式を用いる.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで, Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域であり, u_i は流速, p は圧力, Re はレイノルズ数である.

Dirichlet 境界条件, Neumann 境界条件はそれぞれ以下のように表される.

$$u_i = g_i \quad \text{in } \Gamma_g \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) n_j = h_i \quad \text{in } \Gamma_h \quad (4)$$

ここで, Γ_g , Γ_h は, Dirichlet 境界条件, Neumann 境界条件を表し, g_i , h_i はそれぞれの境界上で規定される流速とトラクションである. また δ_{ij} は Kronecker のデルタ, n_i は外向き単位法線ベクトルである.

支配方程式 (1), (2) に対し, 空間方向の離散化に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用い, 時間方向の離散化手法として, 流速に対して二次精度である Crank-Nicolson 法を適用し, 連続項の流速と圧力に関しては陰的に取り扱う. また, 移流速度 \bar{u}_i は, 式 (5) に示す 2 次精度の Adams-Bashforth 法により陽的に近似を行い, 線形化する.

$$\bar{u}_i = \frac{3}{2} u_i^n - \frac{1}{2} u_i^{n-1} \quad (5)$$

以上により式 (6) に示すような有限要素方程式を得る.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{M}_S) \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_S) \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n) \\ & - (\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{Si}) \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{D}_{ij} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n) \\ & + \mathbf{C}_j \mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{M}_{Pj} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\Delta t} \\ & + \mathbf{A}_{Pj} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n) + \mathbf{G}_P \mathbf{p}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここに, \mathbf{M} , \mathbf{A} , \mathbf{G} , \mathbf{D} , \mathbf{C} はそれぞれ時間微分項, 移流項, 圧力項, 粘性項, 連続項の係数行列を表す. 添字 S , P は SUPG 項, PSPG 項に起因する行列である. 有限要素方程式の解法としては反復解法である GPBi-CG 法を用いる.

(2) NURBS

本研究では形状関数に用いる Spline 関数として, 制御点に付与される重みによって, 少ない要素数で様々な形状を表現することができる NURBS 関数を用いた. 二次元の NURBS 関数は, 二方向の B-Spline 基底関数と制御点に付与される重み, 制御点の位置ベクトルによって表現される. B-Spline 基底関数とは, 式 (1) の Cox de Boor の漸化式によって定義される関数である.

$p = 0$ の場合:

$$\begin{aligned} N_{i,0}(\xi) &= 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ N_{i,0}(\xi) &= 0 & \text{otherwise} \end{aligned}$$

$p = 1, 2, 3 \dots$ の場合:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (7)$$

ここで, N は ξ 方向の B-Spline 基底関数, i は制御点番号, p は B-Spline 基底関数の次数, ξ_i はパラメータ空間の座標

KeyWords : Isogeometric Analysis, NURBS, Incompressible Viscous Flow, Navier-Stokes Equation
 連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL : 03-3817-1815 E-mail : a17.jjbr@g.chuo-u.ac.jp

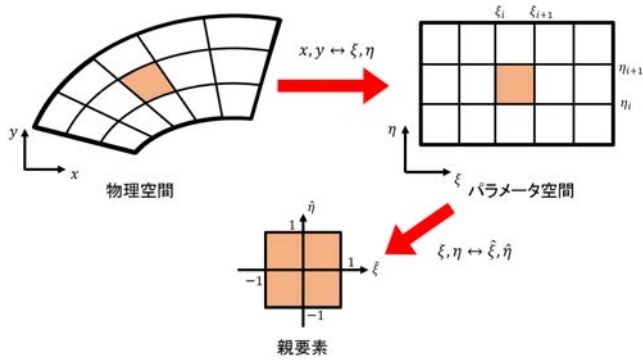


図-1 変数変換

であるノットであり，以下に示すようなノットベクトルと呼ばれる一様増加する数列によって与えられる．

$$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}) \quad (8)$$

ノットベクトルは，CAD で描いた形状モデルから得られる数列で，B-Spline 基底関数と IGA における要素を定義するパラメータである．式 (7) で表される B-Spline 基底関数を用ると，NURBS 関数の基底関数 $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$ と NURBS 曲面 $S(\xi, \eta)$ は式 (10) のように表される．

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}} \quad (9)$$

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) B_{i,j} \quad (10)$$

ここで， M は η 方向の B-Spline 基底関数， j は η 方向の B-Spline 基底関数の制御点番号， q は η 方向の B-Spline 基底関数の次数， $w_{i,j}$ は物理空間の座標である制御点に付与される重み， $B_{i,j}$ は制御点の位置ベクトルである．

(3) IGA における変数変換

IGA では形状関数に Spline 関数が用いられるため，式 (9) で示した NURBS 関数を用いて，各要素での流速と圧力，重み関数は式 (11)，(12)，(13) のように表現される．

$$u_i^e(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{en}} R_{eI}(\xi, \eta) u_{i,I} \quad (11)$$

$$p^e(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{en}} R_{eI}(\xi, \eta) p_I \quad (12)$$

$$w_i^e(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{en}} R_{eI}(\xi, \eta) w_{i,I} \quad (13)$$

ここで， n_{en} は要素を構成している制御点の数である．また，Spline 関数は物理空間の関数ではなく，ノットというパラメータ空間の関数であり，数値計算はパラメータ空間において行われる．そのため，物理空間 $\Omega_e(x, y)$ とパラメー

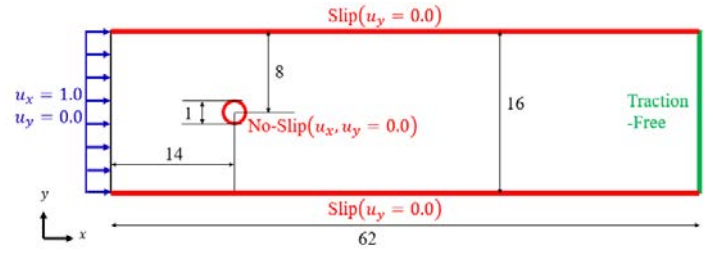


図-2 解析モデル，境界条件

タ空間 $\Omega_e(\xi, \eta)$ で変数変換を行う必要がある．また，変数変換を施したことにより，解析的な積分が困難となるためにパラメータ空間 $\Omega_e(\xi, \eta)$ から親要素 $\hat{\Omega}_e(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ に変数変換を行い，式 (14) に示す Legendre-Gauss の積分公式によって数値積分を行う．

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\hat{\xi}, \hat{\eta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta} = \sum_{i=1}^{ngp} \sum_{j=1}^{ngp} F(\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_j) w_i w_j \quad (14)$$

ここで， ngp は積分点数， $\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_j$ は親要素における積分点の座標， w_i, w_j は積分点の重みである．このように IGA では変数変換を二度施す必要がある (図-1 参照)．ここで，パラメータ空間から親要素への変数変換は以下の式により行われる．

$$\hat{\xi} = -\frac{\xi_{i+1} + \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} + \frac{2}{\xi_{i+1} - \xi_i} \xi \quad (15)$$

$$\hat{\eta} = -\frac{\eta_{i+1} + \eta_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} + \frac{2}{\eta_{i+1} - \eta_i} \eta \quad (16)$$

3. 数値解析例

本報告では，図-2 に示すような円柱周り流れ問題を取り上げ IGA により解析を行い，従来の有限要素法による解析結果と比較することにより構築した手法の妥当性と有効性を確認した．また，形状関数の次数，積分点数による結果の差異についても詳細に検討した．

4. おわりに

本報告では，NURBS 関数を用いた IGA による 2 次元非圧縮性粘性流れ問題の解析手法について述べた．補間に用いる NURBS 関数の次数と積分点数の差異による計算結果の比較等については講演時に示す．

参考文献

- 1) T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis:CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
- 2) J.A.Cottrell, T.J.R Hughes and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis:Toward integration of CAD and FEA, Wiley Publishing, 335p, 2009.