

変分原理に基づくコンクリートの温度ひび割れ問題の定式化

○東北大学大学院工学研究科 学生会員 中村 明莉
 東北大学大学院工学研究科 学生会員 山中 耀介
 東北大学災害科学国際研究所 正会員 森口 周二
 東北大学災害科学国際研究所 正会員 寺田 賢二郎

1. 目的

本研究ではコンクリートの温度ひび割れ問題を定式化する。本手法の特徴は、車谷らのコンクリートの破壊力学に基づく連続体損傷モデル¹⁾を用いて損傷発展と熱伝導の連成問題を変分原理に基づいて定式化する点である。また、数値計算例を示し提案手法の妥当性及精度について議論する。

2. 構成モデリング

Helmholtz の自由エネルギー密度を弾性損傷成分 $\psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$, 損傷硬化に関する成分 $\psi^k(\kappa)$, 比熱に関する成分 $\psi^T(T)$ の和として、次式で定義する。

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \kappa, T) \equiv \psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}, d, T) + \psi^k(\kappa) + \psi^T(T) \quad (1)$$

ここに、 $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$, \mathbf{u}, κ, T はそれぞれ微小ひずみテンソル, 変位, 損傷硬化変数²⁾, 絶対温度であり, $d \in [0, 1]$ は材料の局所的な損傷の度合いを表す損傷変数である。また, $\psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$, $\psi^k(\kappa)$, $\psi^T(T)$ を以下のように定義する。

$$\rho\psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}, d, T) = \frac{1}{2}(1-d)K(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2}K((\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) - |\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})|)\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + (1-d)G \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3K\alpha(T - T_R)\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2)$$

$$\rho\psi^k(\kappa) = -\frac{1}{2}r(\kappa - \kappa_0)^2 \quad (3)$$

$$\rho\psi^T(T) = \rho c \left(T - T_R - T \ln \frac{T}{T_R} \right) \quad (4)$$

そして、弾塑性モデルにおける降伏関数と類似の損傷降伏関数 ϕ_d を次式で定義する。

$$\phi_d(A_d, A_k, d, \kappa) = \left(\frac{1}{\kappa} + \beta \right) (1-d)A_d + A_k - A_0 \leq 0 \quad (5)$$

ここに、 A_d, A_k はそれぞれ損傷変数 d , 損傷硬化変数 κ とエネルギー共役な熱力学的駆動力であり, $A_0 \geq 0$ は初期の損傷開始状態を示す閾値である。加えて, β は車谷ら¹⁾によってコンクリートの破壊力学に基づいて提案された定数であり, 材料パラメータと代表要素長 h_e および破壊エネルギー G_f , κ の初期値 κ_0 を用いて次式で表される。¹⁾

$$\beta = \frac{E\kappa_0 h_e}{G_f} \quad (6)$$

式(5)の損傷降伏関数 ϕ_d を用いることで最大散逸の原理より, d と κ の発展則を以下のように導出することができる。

$$\dot{d} = \lambda \frac{\partial \phi_d}{\partial A_d} = \lambda \left(\frac{1}{\kappa} + \beta \right) (1-d) \quad (7)$$

$$\dot{\kappa} = \lambda \frac{\partial \phi_d}{\partial A_k} = \lambda \quad (8)$$

ここに λ は Lagrange の未定乗数である。ここで, 式(8)を式(7)に代入することで得られる関係式

$$\dot{d} = \left(\frac{1}{\kappa} + \beta \right) (1-d)\dot{\kappa} \quad (9)$$

は, 車谷らの損傷モデル¹⁾の時間微分に他ならない。このことは, 式(7), (8)の発展則が車谷らの損傷モデルと等価であることを意味する。最後に, 損傷発展に関する負荷/除荷条件は次式で表される。

$$\lambda \geq 0, \quad \phi_d \leq 0, \quad \lambda \phi_d = 0 \quad (10)$$

3. 変分法による熱-機械連成問題の定式化

Canadijia と Mösler³⁾の手法より, コンクリート材料からなる連続体 \mathcal{B} の熱力学的平衡状態を導く最適化問題を次のように定義する。

$$\inf_{\forall \dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}} \sup_{\forall T} \dot{\Phi}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T) \quad \text{subject to Eqn. (7)(8)} \quad (11)$$

ここで, $\dot{\Phi}$ は単位時間あたりにおける連続体 \mathcal{B} の全エネルギー変化率であり, 次式のように定義した。

$$\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T) \equiv \int_{\mathcal{B}} \dot{\Upsilon}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T) dV + \dot{G}^{\text{ext}}(\dot{\mathbf{u}}, T) \quad (12)$$

また, 局所ポテンシャル変化率 $\dot{\Upsilon}$ の具体形を次式で定義する。

$$\dot{\Upsilon}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T) = \rho \dot{e}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}) - \rho T \dot{\eta} + D(f(T, \theta)\dot{\lambda}) - \chi(\mathbf{G}) \quad (13)$$

ここで, $e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}) = \psi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}) + \eta T$ は内部エネルギー密度であり, $f(T, \theta)$ は平衡温度 $\theta = \partial_{\rho\eta} e$ と外部温度 T を用いて $f(T, \theta) = \frac{T}{\theta}$ で表される積分因子である。また, $\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T)$ の $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T)$ に関する停留条件を時間離散化することで, 時刻 $t = t_{n+1}$ における支配方程式を以下のように得ることができる。

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} dV + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_{n+1} dV + \int_{\partial_{\text{MN}} \mathcal{B}} \mathbf{T}_N \cdot \delta \mathbf{u}_{n+1} dA = 0 \quad (14)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \rho (\eta_n - \eta_{n+1}) \delta T_{n+1} dV + \int_{\mathcal{B}} \frac{\delta T_{n+1}}{T_n} \Delta \lambda A_0 dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{Q}_{n+1} \cdot \nabla \left(\frac{\delta T_{n+1}}{T_{n+1}} \right) - \int_{\partial_{\text{HN}} \mathcal{B}} \mathbf{Q}_N \frac{\delta T_{n+1}}{T_{n+1}} dA + \int_{\partial_{\text{HR}} \mathcal{B}} \beta \left[1 - \frac{T_R}{T} \right] \delta T dA + \int_{\mathcal{B}} \rho h \frac{\delta T_{n+1}}{T_{n+1}} dA = 0 \quad (15)$$

$$\theta_{n+1} = T_n \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \phi_d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \kappa_{n+1}, \Delta \lambda) \\ &= \left(\frac{1}{\kappa_{n+1}} + \beta \right) (1-d_{n+1}) A_d(\boldsymbol{\varepsilon}_n) + A_k(\kappa_{n+1}) - A_0 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Key Words: 熱-機械連成, 連続体損傷モデル, 破壊力学, コンクリート, 温度ひび割れ, 変分原理

〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 災害科学国際研究所 4F S403-S404, TEL 022-752-2132, FAX 022-752-2133

表-1 材料パラメータ

コンクリートの材料パラメータ		例題 (1)	例題 (2)
E	ヤング率 [MPa]	2.00×10^4	2.00×10^4
γ	ポアソン比	0.00	0.00
r	損傷硬化に関する係数	7.00	0.00
G_f	破壊エネルギー [$\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$]	5.00×10^{-2}	5.00×10^{-2}
κ_0	κ の初期値	1.00×10^{-4}	1.00×10^{-4}
A_0	損傷開始の閾値 [MPa]	4.5×10^{-1}	4.8×10^{-1}
α	熱膨張係数 [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]	-	1.00×10^{-5}
c	比熱 [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1}$]	-	1.05×10^3
k	熱伝導率 [$\text{J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]	-	1.60

鉄筋の材料パラメータ		例題 (2)
E	ヤング率 [MPa]	2.10×10^5
γ	ポアソン比	0.00
α	熱膨張係数 [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]	1.218×10^{-5}
c	比熱 [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1}$]	4.61×10^2
k	熱伝導率 [$\text{J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]	5.30

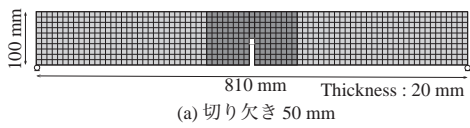
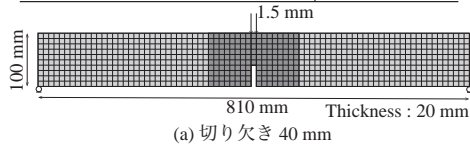


図-1 解析モデル

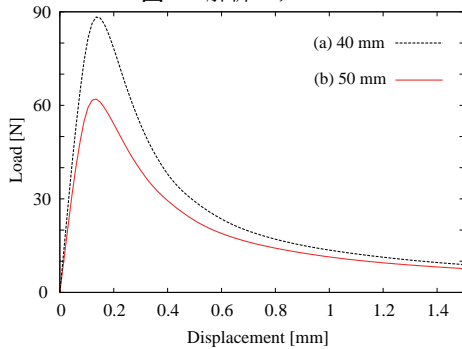


図-2 荷重-変位曲線

4. 数値計算例

2つの数値計算例を通して本研究の性能を検証する。解析に使用する材料パラメータは表-1のとおりである。

4.1 切欠き付きはりの3点曲げ試験

切欠き付きはりの3点曲げ試験を行い、破壊エネルギーを計算する¹⁾ことで、本手法の性能を検証する。図-1に示す、切欠き長さの異なる2つのモデルを解析対象とする。解析結果として、それぞれのモデルの荷重-変位曲線を図-2に示す。これらの曲線下の面積を台形積分を用いて計算し、その差を切欠き面積の差で除することによって、見かけの破壊エネルギーを算出する。

$$G_f = \frac{42.2986 - 32.3118}{(50 - 40) \times 20} = 0.04993... \approx 0.05 \text{N/mm} \quad (18)$$

この値は、表-1で与えた破壊エネルギーの値と近い値であることが分かる。このことから、本手法が破壊エネルギーのエネルギー収支に基づく手法であることが分かる。

4.2 鉄筋コンクリートの温度収縮ひび割れ問題

RC部材が温度低下によって収縮したときのひび割れ性状を再現する。図-3(a)に示す簡易的なRCモデルを解析対象

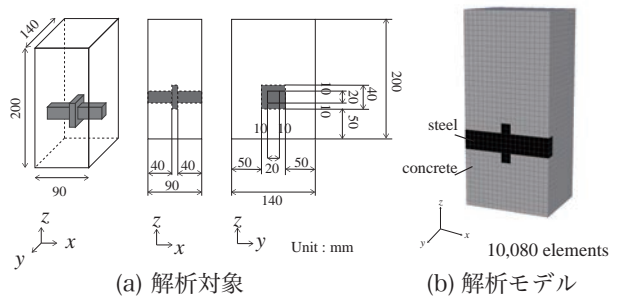


図-3 柱のひび割れ問題のモデルと力学的境界条件

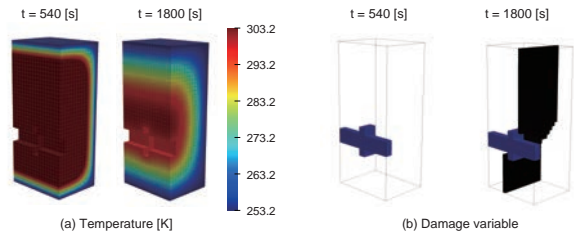


図-4 柱のひび割れ問題の解析結果

とし、対称性を考慮して図-3(b)のように解析対象をy軸に垂直な面で半分に取り切ったものを解析モデルとする。境界条件として、x軸方向に対して垂直な2つの表面のz軸方向の変位を拘束し、断熱条件 $Q_N = 0$ を与える。また、それら2つ以外の表面には、300秒間で $\Delta T = -50^{\circ}\text{C}$ となるように直線的に温度を低下させ、その後1500秒間保温するように温度時刻歴をDirichlet境界条件として与える。なお、コンクリートのみ損傷するものとし、鉄筋は損傷しない線形弾性体とする。解析結果を図-4に示す。時間の経過とともに鉄筋コンクリートの表面の温度が中心に向かって伝達し、モデル全体の温度が低下していることを確認できる。また、 $t = 1800[\text{s}]$ ではモデルの上部から下部にかけて直線的に大きく損傷しており、亀裂面が形成されていることが示されている。これらの解析結果は、本手法がRC部材の温度収縮ひび割れ性状を再現可能であることを例証するものである。

5. 終わりに

コンクリートの破壊力学に基づく連続体損傷モデルを参考にして、温度ひび割れ問題について変分原理に基づく定式化を提案した。今後は材料パラメータの温度依存性を考慮し、温度ひび割れ現象の予測精度の向上を図る。

参考文献

- 1) Kurumatani, M., Terada, K., Kato, J., Kyoya, T. and Kashiyama, K.: An isotropic damage model based on fracture mechanics for concrete, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 155, pp. 49-66, 2016, cited By 48.
- 2) Brepols, T., Wulfinghoff, S. and Reese, S.: Gradient-extended two-surface damage-plasticity: Micromorphic formulation and numerical aspects, *International Journal of Plasticity*, Vol. 97, pp. 64-106, 2017.
- 3) Canadija, M. and Mosler, J.: On the thermomechanical coupling in finite strain plasticity theory with non-linear kinematic hardening by means of incremental energy minimization, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, No. 7-8, pp. 1120-1129, 2011, Cited By :36.