

2次元平面内の曲線 IGA はり要素の構築と自由曲線で描いたはりの解析

日本大学大学院 学生会員 ○唐澤 奈央子
日本大学 正会員 長谷部 寛

1. はじめに

土木構造物の構造部材には直線部材だけでなく曲線部材が扱われることも多い。しかし従来の有限要素解析の場合、曲線部材を扱う際にも直線の要素で細かく分割して解析を行うことが多く、形状誤差の発生を伴う。従来の有限要素解析でも高次要素を用いれば曲線を表現することも可能だが、1要素内の節点数が多くなり計算時間が増すなど実用面での課題があるため¹⁾、一般的には低次関数や直線の要素が用いられている。そこで、この問題の解決策として、Hughesらにより提案されたアイソジオメトリック解析²⁾ (以下 IGA) を土木構造物の構造解析に適用することが有効であると考え、IGA は近似関数の基底関数に、CAD の形状表現に用いられる NURBS に代表されるスプライン関数を採用することで、厳密な形状表現を可能にする。

有限要素解析で扱われる要素にははり要素、シェル要素、ソリッド要素などがあるが、曲線でモデル化できるような細長い部材にははり要素が多く用いられる。本研究ははりの長さに対して断面が比較的大きい部材を対象として、ベルヌーイ・オイラーの仮定に基づいた、NURBS を基底関数とする 2次元の曲線 IGA はり要素を構築した。そして、CAD 上で描いた自由曲線で片持ちばりの解析を行った。

2. NURBS 曲線と基底関数

式(1)に示す NURBS 曲線は式(2)に示す NURBS 基底関数 $R_i^p(\xi)$ とコントロールポイントの位置ベクトル \mathbf{B}_i の線形結合で表される。

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (1)$$

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_i^p(\xi) w_i}{\sum_{a=1}^n N_a^p(\xi) w_a} \quad (2)$$

ここで、 ξ は軸方向に沿う座標値、 w_i は形状を制御するためのコントロールポイントにおける重み、 p は関数の次数、 n はコントロールポイント数、 $N_i^p(\xi)$ は B-Spline 基底関数と呼ばれる再帰的な関数であり、式(3a), (3b)で表される。

・ $p = 0$ の場合

$$N_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3a)$$

・ $p \geq 1$ の場合

$$N_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(\xi) \quad (3b)$$

ここで、 ξ_i はノットと呼ばれるパラメータであり、曲線上の要素の境界を表す局所座標値である。

3. 仮想仕事式と離散化式

式(4)に示す Slivker³⁾ の曲線ベルヌーイ・オイラーはりのひずみの定義を用いて、ベルヌーイ・オイラー仮定を適用した仮想仕事の原理⁴⁾ (式(5), (6)) に代入し、Galerkin 法に基づく有限要素法で離散化した。

離散化式は NURBS が C^{p-1} 連続であり、微分しても要素間の連続性は自動的に保持されるという考えから、未知変数にたわみ角を含まず式(7)のように構成した。

$$\varepsilon = u' + kv, \quad \kappa = \theta', \quad \theta = -v' + ku \quad (4)$$

$$\int_0^L (\varepsilon^* N + \kappa^* M) d\xi \\ = \int_0^L (u^* f_u + v^* f_v) d\xi + [\varepsilon^* \bar{N} + \kappa^* \bar{M}]_L \quad (5)$$

$$N = \varepsilon EA, \quad M = \kappa EI \quad (6)$$

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} R_i^p(x) u_i, \quad v(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} R_i^p(x) v_i \quad (7)$$

ここで、 u は軸方向変位、 v は軸直交方向変位、 k は曲率、 θ はたわみ角、 $'$ は ξ で 1 階微分した値、 L ははりの全長、 N は軸力、 M はモーメント、 f_u は軸方向の分布荷重、 f_v は軸直交方向の分布荷重、 $*$ は重み関数、 $\bar{\quad}$ は境界値、 ε は膜ひずみ、 κ は曲げひずみ、 E はヤング率、 A は断面積、 I は断面二次モーメントである。

4. 自由曲線で描いたはりの解析

4.1 解析対象と解析条件

解析モデルと解析条件を図-1 に示す。CAD で自由曲線を描き、自由端の軸直角方向 η に集中荷重を与える解析を行った。境界条件は片持ち梁とした。ヤング率は $E = 2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ 、断面積は $A = 0.02 \text{m}^2$ 、断面二次モーメントは $I = 1.667 \times 10^{-5} \text{m}^4$ とした。また、解析メッシュおよび曲率分布を図-2 に示す。描画した NURBS 曲線は 3 次 4 要素である。図中の Δ はノット (式(8))、 \circ はコントロールポイント (表-1) を表す。図-2 より、自由曲線の曲率

キーワード アイソジオメトリック解析, NURBS, 曲線 IGA はり要素, ベルヌーイ・オイラー仮定
連絡先 〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14

は場所により異なっているため、式(4)の曲率 k は積分点ごとに異なる値を与えた。

$$\Xi = \{0,0,0,0,1,2,3,4,4,4\} \quad (8)$$

また、仮想仕事の原理(式(5))の要素係数行列の計算には数値積分(ガウス求積法)を用い、全ての解析ケースで積分点数を10点とした。

4.2 直線要素との形状誤差の比較

NURBSを基底関数に用いた本研究は、要素数はわずか4要素であるが厳密な形状のまま解析を行うことができる。それに対して従来の有限要素解析は、自由曲線を解析するためには多くの要素数が必要となる。ここでは解析対象の自由曲線を直線要素で折れ線近似した。16,32,64要素を用いた場合を対象に、式(9)を用いてはり全体を200分割したあと厳密形状との形状誤差を算出した。

$$\sum_{a=1}^m \sqrt{(x_a - x_{a,NURBS})^2 + (y_a - y_{a,NURBS})^2} \quad (9)$$

ここで、 m は分割数(今回200とした)、 x_a, y_a は直線要素を200分割した箇所におけるメッシュ上の座標値、 $x_{a,NURBS}, y_{a,NURBS}$ はNURBS曲線を230分割した箇所における曲線上の座標値である。

形状誤差の結果を図-3に示す。16要素を用いたときには形状誤差の和が1m以上に、そして64要素を用いたときには0.1m程度になった。このように、本研究のはり要素は少ない要素数で形状を厳密に表現できることを目的とする。

4.3 解析結果

方程式(式(5))を解いて得られた解を式(7)に代入し、変位の関数を得た。変位の関数は u, v 方向の変位であるため、 x, y 方向に座標変換を行い、変形前後の形状を比較した結果を図-4に示す。自由端に鉛直下向きの荷重を載荷したため、下方に曲線がたわんでいることがわかる。一方で、このような自由曲線の厳密解を得ることは難しいため、精度検証については今後の課題とする。

5. まとめ

本研究は細長い曲線部材のアイソジオメトリック解析のために、2次元平面において変位のみを未知変数に有する曲線ベルヌーイ・オイラーはり要素を構築し、CAD上で描いた自由曲線で片持ちばりの解析を行った。本研究で対象とした自由曲線は従来の直線要素で離散化する場合と比べ少ない要素数で厳密な形状を表現できることを確認した。また、アイソジオメトリック解析で曲線はりの解析をすることができた。今後精度検証を行う。

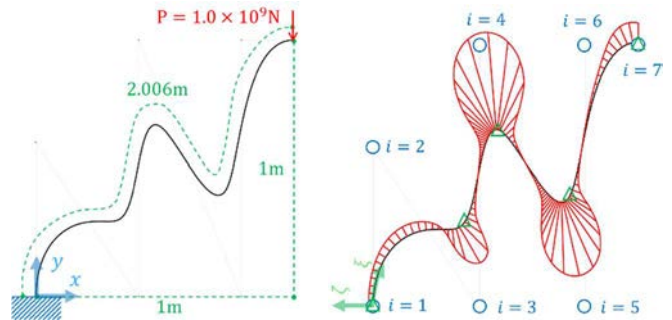


図-1 解析モデルと境界条件

図-2 解析メッシュと曲率分布

表-1 コントロールポイントの位置ベクトルと重み

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.0	0.0	0.4	0.4	0.8	0.8	1.0
y_i	0.0	0.6	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0
w_i	1.0	0.3	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0

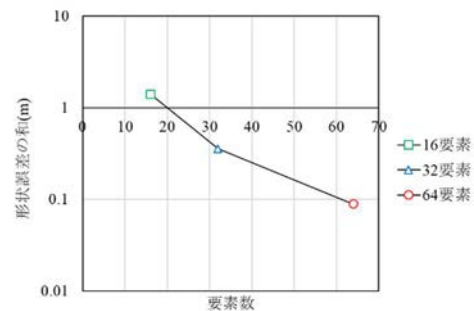


図-3 直線の要素との形状誤差の大きさ

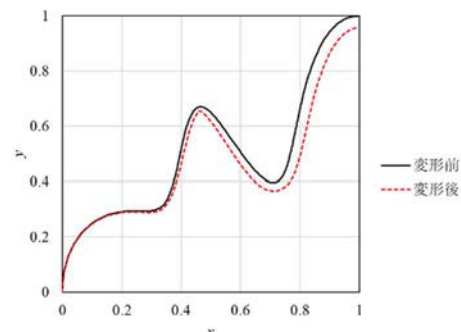


図-4 変形図

参考文献

- 1) 中西宏, 波田凱夫: 曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, 318, 41-50, 1982.
- 2) J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, Y. Bazilevs: Isogeometric Analysis-Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, 2009.
- 3) V.Slivker: Mechanics of Structural Elements: Theory and Applications (Foundations of Engineering Mechanics), Springer, 2010
- 4) V F. Armero: Invariant Hermitian finite elements for thin Kirchhoff rods. I: The linear plane case, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 213-216, 427-457, 2012.