緩和曲線中の遠心荷重の計算のための近似的な曲率半径の計算方法の検討

JR 東日本　正会員　○原　洪太
JR 東日本　正会員　山口　慎
JR 東日本　正会員　山下　洋平

1．はじめに

鉄道構造物の設計において，曲線を有する構造物には曲線半径に基づく遠心荷重を作用させる [1)]．実設計では曲線のうち，円曲線では曲線半径に応じた遠心荷重を算出するが，緩和曲線においては接続する円曲線の曲線半径をもとに遠心荷重を算出するため，本来の遠心荷重を用いた計算はしていないことが多い．これは、緩和曲線においては曲率半径が断面ごとに異なり，実際の曲率半径を用いて遠心荷重を求めることが困難であることによる．

そこで本検討では，緩和曲線における適切な遠心荷重の算出を目的として，緩和曲線中の近似的な曲率半径を緩和曲線の長さ及び接続する円曲線の曲線半径により算出する方法を導いた．

2．緩和曲線の式の導出

（1）緩和曲線の式

日本で設計に用いられる緩和曲線は**式①**と表される 3 次放物線である [2)]（**図 1**）．この**式①**の関数において**式②**，**式③**の 2 式が成り立つ [2)]．ただし，R は接続する円曲線の半径，X は直線と緩和曲線の接点（以下 BTC）から緩和曲線と曲線の接点（以下 BCC）までの接線距離，接続する直線区間は $y=0\ (x\leq 0)$，BTC は(0, 0)，θx は緩和曲線の中心角．θ は x=X の時の θx．L は緩和曲線長である．

（2）　緩和曲線の式中の BTC から BCC までの接線距離 X の導出

鉄道橋の設計において既知としてよい数値は，R 及び L である．そこで，任意の緩和曲線の式を求めるため，R 及び L のみを用いて X の値を求める．

式②において x=X となるの時、**式④**が成り立つ．これを**式③**に代入すると、**式⑤**を得ることができる．これを整理し，**式⑥**となる．この**式⑥**に対して，3 次方程式の解の公式（カルダノの公式）を用いる．$a=40R^2$，$b=40R^2L$ とし，$u=-b/2+\{(b/2)^2+(a/3)^3\}^{1/2}$，$v=-b/2-\{(b/2)^2+(a/3)^3\}^{1/2}$ とおく．ここで，$\omega=(-1+\sqrt{3}\ i)/2$ として（ただし i は虚数）**式⑥**の解は**式⑦**となる．ここで**式⑥**は X についての単純増加関数であるため，実数解は 1 つのみである．u，v が実数であることから，**式⑥**の解は $X=u^{1/3}+v^{1/3}$ となる．これにより，①の緩和曲線の式を R 及び L を用いて表すことができる．

3．　緩和曲線中の曲率半径の導出

2.(2)において求めた緩和曲線の式について，その曲率半径 r(x)は**式⑧**となる．

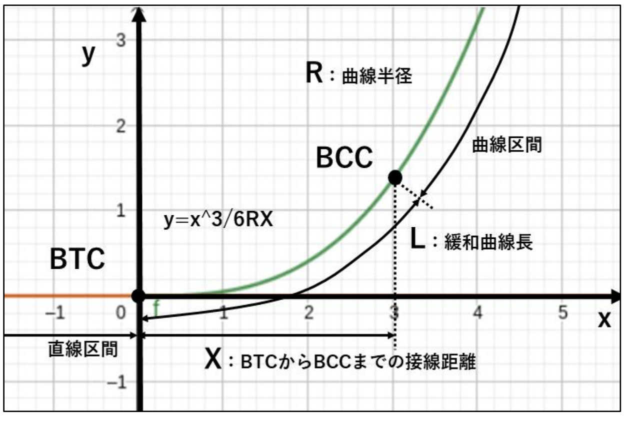

図-1　緩和曲線とその前後の関係

$$f(x)=x^3/6RX \cdots ①$$

$$\tan\theta x=x^2/2RX \cdots ②$$

$$X=L\{10/(10+\tan^2\theta)\} \cdots ③$$

$$\tan\theta=X/2R \cdots ④$$

$$X=L\{10/(10+X^2/(4R^2))\} \cdots ⑤$$

$$X^3+40R^2X-40R^2L=0 \cdots ⑥$$

$$X=u^{1/3}+v^{1/3},\ X=\omega u^{1/3}+\omega^2 v^{1/3},\ X=\omega^2 u^{1/3}+\omega v^{1/3} \cdots ⑦$$

キーワード　鉄道橋，遠心荷重，緩和曲線，曲率半径
連絡先　〒150-0002　東京都渋谷区渋谷三丁目 13 番 11 号　TK ビル 5 階　TEL　03-3400-0734

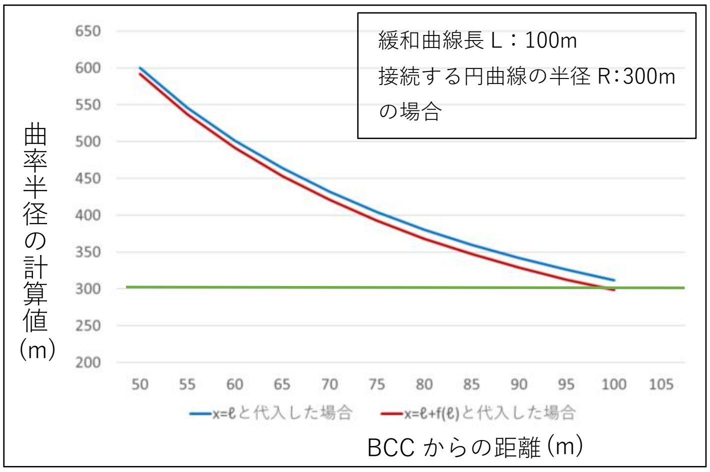

図-2　緩和曲線中の曲率半径の近似計算結果

$$r(x)=((1+x^4/(4R^2X^2))^{3/2}RX)/x \cdots ⑧$$

$$x^5+40R^2X^2x-40R^2X^2\ell=0 \cdots ⑨$$

式②，**式③**を用いれば任意の x はその x の値における緩和曲線上の距離ℓを用いて，**式⑨**となり，x の 5 次方程式を解く必要があるため，x の値を求めることは通常は困難である．

そこで，x に既知の値である緩和曲線上の距離ℓを代入することを考える．0≤x≤X において，r(x)が減少関数であること，x≤ ℓであることから r(ℓ)≤r(x)が成り立つ．遠心荷重は、曲率半径が小さい方が大きな値が算出されるため，本来よりも小さな曲率半径が算出される場合，安全側の計算となる．よって x=ℓとすることは安全側の計算であるといえる．

ただし，この計算を行う場合においても**図-2** の x=ℓと代入した場合のグラフに示す通り，接続する円曲線の半径が短く，緩和曲線長が長い場合にはうまく近似できず，BCC で曲率半径の計算値が円曲線の半径よりも大きくなる．そこで， 0≤x≤X において，r(x)（**式⑧**） が x の減少関数であることから，ℓに f(ℓ)を加えたℓ+f(ℓ)を x に代入することとした． ここで f(ℓ)>0 (x>0)より r(ℓ +f(ℓ))≤r(ℓ)≤r(x)が成り立ち， 小さな曲率半径が導出され x=ℓと代入した場合よりも安全側とすることができた（**図-2**　 x=ℓ+f(ℓ)と代入した場合）

ただし，BCC における計算結果が曲線半径よりも小さくなる場合のみに適用可能とするため，緩和曲線長 L が曲線半径 R の 0.35 倍以下である場合に限り適用可能とした． しかし， この場合， 鉄道としてはほとんど見られない半径 300m 以下の曲線に接続する緩和曲線以外には適用可能となり，多くの鉄道橋に適用可能だと言える．

4．実設計への適用

ここまでで導いた遠心荷重の算出方法を， 実際の鉄道橋の設計に適用する．対象とする鉄道橋は半径 400m の曲線に至る緩和曲線中に位置し，6 径間橋長約 42m の工事桁であり、既設計での主桁断面は H522×470×20×35 である．この工事桁主桁の設計において工事桁の途中で主桁の断面寸法を変化させることを前提に本検討の算出方法を適用した． 同工事桁を 6 段階に断面寸法を変化させた場合， 最も直線に近い部分では断面を H502×325×20×25 とすることが可能となり、鋼重を 20%以上減少する計算となった． 橋脚などの設計への適用も行うことでより効果的であると考えられる．

5．まとめ

緩和曲線中の工事桁等の鉄道橋の設計において過小な曲線半径の値を用い，実挙動よりも大きな遠心荷重を見込んでいることに着目して緩和曲線中の曲率半径の計算方法を検討した． この計算方法を実設計に適用することで，鋼重を抑えられることがわかった．本検討は緩和曲線中に建設する鉄道橋の設計を経済的にすることに繋がると考えられるため， 実用に向けた検討を進めていきたい．

参考文献

1)国土交通省鉄道局監修，鉄道総合技術研究所編：鉄道構造物等設計標準・同解説　鋼・合成構造物， 丸善，2009.
2)Autodesk Help：概要 – 緩和曲線の定義，2018. https://knowledge.autodesk.com/ja/support/civil-3d/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2018/JPN/Civil3D-UserGuide/files/GUID-DD7C0EA1-8465-45BA-9A39-FC05106FD822-htm.html， 最終閲覧：2022 年 3 月 28 日