

## Voigt モデルを用いた 2 点法による地山変位の予測に関する考察

鉄建建設(株) 正会員 ○宇田 誠, 舟橋 孝仁, 植村 義幸, 梨本 裕  
東京都立大学 正会員 砂金 伸治

## 1. はじめに

山岳トンネルでは、施工中や供用中に、応力解放などの外力が作用しないにも関わらず、変位がなかなか収束せず、対策工の検討が必要になる場合がある。このような場合には、将来変位をなるべく正確に予測するために、計測結果の再現式を求め、再現式を将来変位予測式として活用する機会が多い。

地山挙動の時間依存性挙動が減速・収束段階にあると見なせる場合には、地山変位の計測結果を再現し、将来変位を予測するために、バネとダッシュポットを並列につないだ Voigt モデル<sup>1)</sup>がよく利用される。その際、Voigt モデルの係数を求めるには変位を変位速度に換算して最小二乗法を適用する方法と、クリープ係数を仮定して最小二乗法を適用する 2 つの方法が良く使われているが、そこにはいくつか課題があると考えられる。

本報では、これらの課題を確認し、最小二乗法に頼らない 2 点法を提案する。

## 2. Voigt モデル

Voigt モデルの構成方程式は、式(1)となる。

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot d\varepsilon/dt \quad (1)$$

$\sigma$ : 作用応力,  $E$ : バネの弾性係数,  $\eta$ : ダッシュポットの粘性係数,  $\varepsilon$ : クリープ歪,  $t$ : 時間

作用応力が一定の場合、解析解は、式(2)となる。

$$\varepsilon = \sigma/E \cdot [1 - \exp(-E \cdot t/\eta)] \quad (2)$$

歪にトンネル半径  $R$  を掛けて変位 ( $\delta = \varepsilon \cdot R$ ) に換算すると解析解は、式(3)になる。

$$\delta = \alpha \cdot [1 - \exp(-\beta \cdot t)] \quad (3)$$

ただし、 $\alpha = R \cdot \sigma/E$ ,  $\beta = E/\eta$  と置く。なお、 $\alpha$  は、収束変位を示す。

## 3. 最小二乗法を用いた再現式の求め方

## (1) 変位速度法

この方法は、地山変位の計測結果である変位を変位速度に換算して、最小二乗法を適用する方法<sup>2)</sup>である。

式(3)を時間で微分すると式(4)が得られる。

$$V = d\delta/dt = \alpha \cdot \beta \cdot \exp(-\beta \cdot t) \quad (4)$$

対数をとると式(5)が得られる。

$$y = \ln V = \ln(\alpha \cdot \beta) - \beta \cdot t = A - \beta \cdot t \quad (5)$$

$$\text{ただし、} A = \ln(\alpha \cdot \beta) \quad (6)$$

地山変位の計測結果から速度に換算し、式(5)をモデル関数として最小二乗法を適用すれば、 $\alpha$  と  $\beta$  を求めることができる。

ただし、現場においては、変位速度そのものを直接測定することは困難であり、地山変位の計測結果から変位速度に換算せざるを得ない。また、計測結果には不規則な変動が含まれ、差分により変位速度に換算するとそれに影響されるので、正確な速度を求めることは容易ではない。そのため、変位速度に換算することなく、計測結果から直接  $\alpha$  と  $\beta$  を求める方が望ましいと考えられる。

## (2) クリープ係数固定法

この方法は、クリープ係数  $\alpha$ ,  $\beta$  のどちらかを仮定して、解く方法<sup>3)</sup>である。ここでは、地山変位の計測結果から収束変位  $\alpha$  を仮定し、解く方法を例示する。

式(3)を式(7)、式(8)のように書き換える。

$$(\alpha - \delta)/\alpha = \exp(-\beta \cdot t) \quad (7)$$

$$y = \ln[(\alpha - \delta)/\alpha] = -\beta \cdot t \quad (8)$$

式(8)をモデル関数として最小二乗法を適用すれば、収束変位  $\alpha$  に対応する  $\beta$  を求めることができる。収束変位  $\alpha$  の仮定が容易でない場合には、 $\alpha$  を変化させて  $\beta$  を求め、計測変位との相関が最も良好な  $\alpha$  と  $\beta$  の組み合わせを選択することになる。しかし、収束変位  $\alpha$  を最初に仮定する点で難がある。

## 4. 2 点法の提案

Voigt モデルにより地山変位の計測結果から再現式を求めるには、式(3)の解析解は 2 つの係数 ( $\alpha$  と  $\beta$ ) しか持たないことから、再現式が通過する点を原点以外に 2 つ選定すれば良い。この考えに基づいた方法を 2 点法として提案する。

キーワード 山岳トンネル, Voigt モデル, 最小二乗法, 2 点法, 二分法

連絡先 〒101-8366 東京都千代田区神田三崎町 2-5-3 鉄建建設(株) 土木本部 TEL : 03-3221-2298

この再現式が通過する 2 点の座標を  $(t_1, \delta_1)$ ,  $(t_2, \delta_2)$  とすれば, 式(3)に代入し, 式(9), 式(10)が得られる.

$$\delta_1 = \alpha \cdot [1 - \exp(-\beta \cdot t_1)] \quad (9)$$

$$\delta_2 = \alpha \cdot [1 - \exp(-\beta \cdot t_2)] \quad (10)$$

式(9)を式(10)で除すると, 未知数が  $\beta$  だけの方程式(11)が得られ, 式(11)の両辺の差を  $F(\beta)$  とすれば, 式(12)が得られる.

$$\delta_1/\delta_2 = [1 - \exp(-\beta \cdot t_1)]/[1 - \exp(-\beta \cdot t_2)] \quad (11)$$

$$F(\beta) = \delta_1/\delta_2 - [1 - \exp(-\beta \cdot t_1)]/[1 - \exp(-\beta \cdot t_2)] = 0 \quad (12)$$

ここで,  $F(\beta) = 0$  を満足する  $\beta$  を二分法で求める.

なお, ここで二分法を採用したのは, Newton-Raphson 法などに比べて効率は劣るものの, 計算手順が単純であり, 確実に解が求まることを重視したためである.

### 5. 施工事例に基づく計測結果の再現

既往のインバート変位計測結果図<sup>2)</sup>から表-1 に示すように, 計測変位結果を読み取った. この計測変位に対して, 変位速度法とクリープ係数固定法および 2 点法で求めた再現式を比較すると図-1 に示すようになる.

40 日後以降, 再現式は, 図-2 に示すように, そのまま将来変位予測式となる. なお, 変位速度法では, 前回の地山変位計測値と今回の計測値の差分を今回の変位速度とし, クリープ係数固定法では, 収束変位  $\alpha$  を 100, 200mm と想定して  $\beta$  を求めた. また, 2 点法では, 20 日後と 40 日後の計測結果を再現式の通過点とした.

変位速度法では, 図-1 に示すように, 変位の計測に乱れがなくても計測時間の間隔が大きいと再現精度が低下する. クリープ係数固定法では, 図-1 に示すように,  $\alpha$  を大きく変化させても再現精度はほとんど変わらない. しかし, 図-2 から解るように, 将来変位の予測値は,  $\alpha$  の値によって大きく変わることから,  $\alpha$  の仮定が容易ではない場合, 注意が必要である.

これに対して, 2 点法は, 再現精度が高いだけでなく, 変位速度への換算による再現誤差, 収束変位の想定による再現誤差を防止・削減できる有効な手段である. 2 点法の特徴でもある最新の計測結果や最も特徴的な計測結果を重視した計測結果の再現は, 信頼性の高い将来変位の予測に結びつく可能性が高いと考えられる.

表-1 インバート変位計測結果

経過日数(日)	10	20	30	40
計測変位(mm)	20. <sup>0</sup>	36. <sup>5</sup>	50. <sup>0</sup>	62. <sup>5</sup>

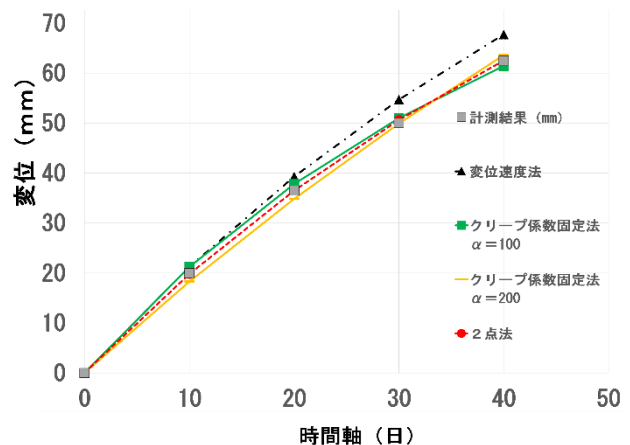


図-1 地山変位測定結果の再現

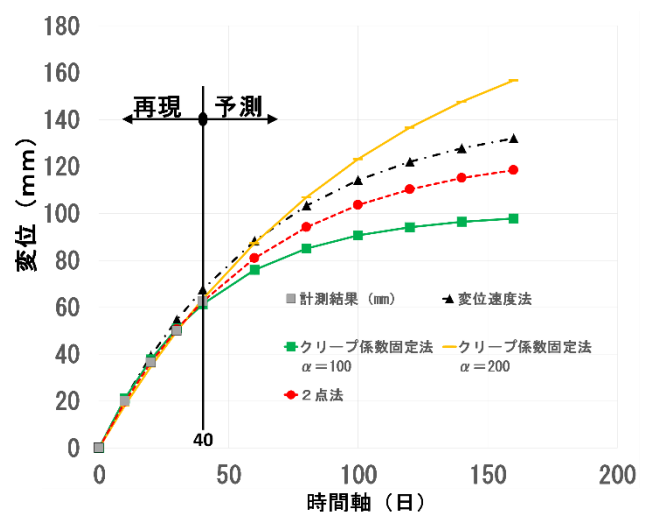


図-2 地山変位測定結果の再現と将来変位予測

### 6. おわりに

本報において, 減速・収束段階の時間依存性を示す再現式を求める手段として, Voigt モデルを用いた 2 点法による地山変位の予測方法を提案した. 今後は, 本手法により, 加速段階の地山挙動の再現式を求める手段として検討を進める必要がある.

### 参考文献

- 1) 土木学会岩盤力学委員会: トンネルの変状メカニズム, 土木学会, pp.135-166, 2003
- 2) 宮沢一雄, 木梨秀雄, 秋山剛史, 伊藤哲, 奈良田恵佐: インバート変位の長期予測と解析による対策工の検討, 土木学会トンネル工学報告集, 第28巻, I-24, 2018
- 3) 今林泰史, 宮寄俊彦, 今地洋祐, 中西努: 盤膨れが懸念される地山での自動変位計測にもとづく設計・施工, トンネルと地下, pp.7-15, 2020