

移動床水理の時系列解析に対する DMD の適用性

新潟大学災害・復興科学研究所
新潟大学工学部工学科

正会員

○安田浩保
齊藤浩輝

1. はじめに

河川において、自発的に形成される河床波の発生・発達の機構を解明することは、工学上の重要な課題である。これまでに、移動床水理ではモデル駆動型解析が行われてきた。モデル駆動型解析では、実現象を人間が解釈し、仮説を構築するため、実現象の正確な物理解釈が必要となる。しかし、移動床水理の複雑さゆえ、その正確な物理解釈を得ることは難しく、発生・発達の機構は未解明である。

近年、新たな研究手法として分野を問わず注目されているのがデータ駆動型解析である。その一つに、乱流の解析を目的として提案された DMD(Dynamic Mode Decomposition)¹⁾がある。DMD は、時系列データから現象の物理解釈を可能にする情報を得ることができる。複雑な現象である移動床水理においても、データ駆動型解析により現象の理解を進めることができると期待される。

移動床水理において、著者らの研究グループが開発した観測装置により、時系列の観測ビッグデータを取得することが可能になった²⁾。しかし、観測ビッグデータにはノイズや欠測値が含まれる。そこで、本研究では、iRIC³⁾による河床変動シミュレーションで取得した時系列データを使用し、DMD を用いて移動床水理の物理解釈を可能にする情報を得ることができるか、その適用性を調べた。

2. DMD による移動床水理の時系列解析

(1) DMD による解析手順

本研究では、Fig.-1 に示すように河床波が発達していく過程の時系列データ $[z_0, z_1, \dots, z_t]$ を使用する。なお、 z_t は時刻 t における底面高をベクトルに並べ替えたものである。DMD では、式 (1) に示す 2 行列について、 $X' \simeq AX$ を満たす行列 A を考える。

まず、打ち切り特異値分解 $X = U_r \Sigma_r V_r^*$ を主要な特異値の数 r で行い、 U_r, V_r 、特異値を対角成分にもつ対角行列 Σ_r を得る。

$$X = [z_0, z_1, \dots, z_{t-1}], X' = [z_1, z_2, \dots, z_t] \quad (1)$$

次に、(2) に示す余因子行列 \tilde{A} について固有値 Λ ・固有ベクトル W を求める。このとき、 A と \tilde{A} は相似であり、 Λ は A の固有値からなる。

$$\tilde{A} = U_r^* X' V_r \Sigma_r^{-1} \quad (2)$$

固有ベクトル W を用いて、式 (3) により、 A の固有ベクトル行列である Φ を得る。 Φ は、全時刻分の底面

形状をいくつかの特徴的空間パターンとして分解したものを表す。また、式 (4) に示す Ψ は、 Φ の時間的な増減を表す。DMD により得られた Φ と Ψ を見ることで、現象の新たな物理解釈を得ることができる可能性がある。

$$\Phi = X' V_r \Sigma_r^{-1} W \quad (3)$$

$$\Psi = \Lambda \Phi^\dagger \vec{x}_0 \quad (4)$$

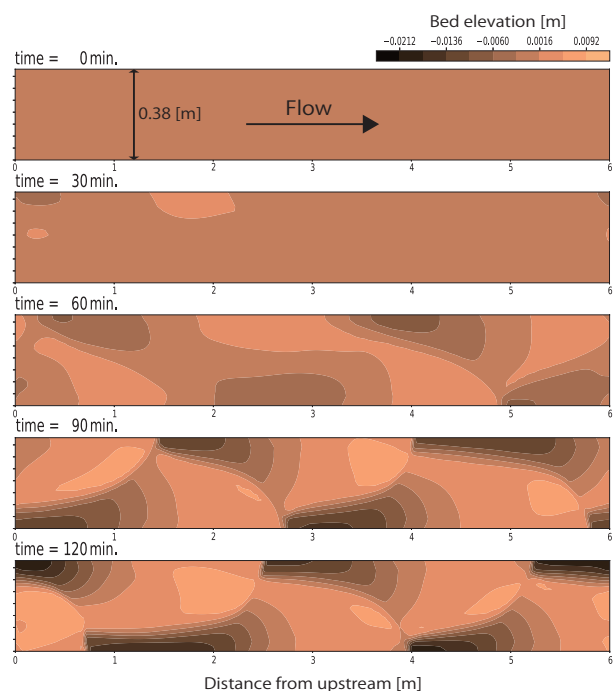


図-1 河床波が発達していく様子

(2) 移動床水理に対する適用性の評価方法

DMD の特徴として、現象を正確に記述する Φ と Ψ が得られた場合、式 (5) に示すように、 Φ と Ψ の内積をとることで元のデータ行列を近似的に再構成できる。Fig.-2 は、同時刻での元の底面高と再構成した底面高の比較である。両者は完全に一致していないことがわかる。本研究では、全ての時刻において、元の底面高と再構成した底面高の差の絶対値が右に歪んだ指数分布となることから、式 (6) に示す平均絶対値誤差 (MAE) を求め、DMD の適用性を評価した。ここで、 $z_{k,n}$ は、時刻 n における z_n の k 行目の要素である。なお、移動床水理において最小規模である河床波 (砂漣) の形態規模が粒径規模⁴⁾ であることから、MAE が使用した砂の粒径以下であるかを指標とした。

Key Words: 移動床水理, 時系列解析, 動的モード分解, *Dynamic Mode Decomposition*
〒950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 TEL 025-262-7053

$$[z_0, z_1, \dots, z_t] \simeq \Phi\Psi = [z'_0, z'_1, \dots, z'_t] \quad (5)$$

$$MAE = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |z_{k,n} - z'_{k,n}| \quad (n = 0, 1, \dots, t) \quad (6)$$

3. 移動床水理に対する DMD の適用性

iRIC によるシミュレーションは、平坦床から河床波が発生・発達し、中規模河床波である交互砂州が移流していく過程を対象とした。計算条件は、流下方向に 6.0 m、横断方向に 0.38 m の水路で、粒径 0.76 mm の砂を使用し、周期境界条件とした。計算結果は、0 ~ 120 分までを 1 秒間隔、空間分解能は流下・横断方向ともに 2 cm で取得した。

(1) 打ち切り特異値分解による誤差

DMD では、打ち切り特異値分解を主要な特異値の数 r で行う。Fig.-3 は、底面高の時系列データに対し、打ち切りの際の r を変化させ DMD を行い、MAE を算出した結果である。MAE が最大となるのは、青色線で示す $r = 10$ の時で、MAE を最小とするのは、桃色線で示す $r = 70$ の時である。この時系列データでは、打ち切り特異値分解を行わなかった場合、すなわち $r = 120$ の場合、MAE は最小にならない。

以上のことから、本研究では、DMD における打ち切り特異値分解は、MAE を最小とする r を用いて行うこととする。

(2) 移動床水理に対する DMD の適用性

Fig.-4 は、シミュレーションにより 1 秒間隔で得られた計算結果を 1 秒・60 秒・120 秒・180 秒の時間間隔の時系列データとし、それぞれ最適な打ち切り特異値分解で DMD を行い、MAE を算出した結果である。図中の青色破線は、シミュレーションに用いた砂の粒径を示す。

赤色線・紫色線で示す、時間間隔 120 秒・180 秒の時系列データに対する解析では、MAE が粒径を上回る箇所がある。一方で、橙色線・緑色線で示す、1 秒・60 秒の時系列データに対する解析では、全ての時刻を通して MAE は粒径よりも小さくなっており、DMD により得られた Φ と Ψ を用いて、平坦床から河床波が発生・発達する過程を良好に再構成できているということがわかる。

以上のことから、底面高の時間発展する過程に対し、DMD による解析を適切な時間間隔の時系列データと適切な打ち切り特異値分解で行うことで、移動床水理の物理を記述する情報を得ることができると分かった。

4. おわりに

本研究では、移動床水理の時系列データに対し、物理解釈を可能にする情報を DMD により得ることができるか、その適用性を調べた。得られた成果を以下に示す。

1. 移動床水理に対する DMD の適用性の評価方法を提案した。
2. DMD により、移動床水理の物理解釈を可能にする情報を得られることを示した。

本研究により、データ駆動型解析による移動床水理の解析が可能であることが示された。一方で、実河川や模

型実験からノイズや欠測値の少ない高密度の時系列データを取得することは難しく、そのような時系列データに対する拡張的な DMD の手法を開発することが今後の課題である。

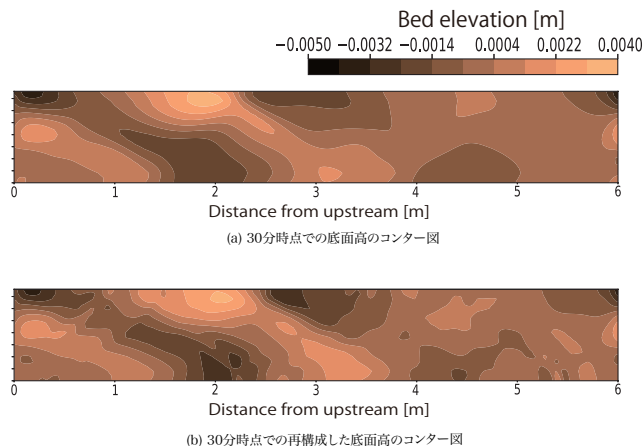


図-2 同時刻での元データと再構成データの比較

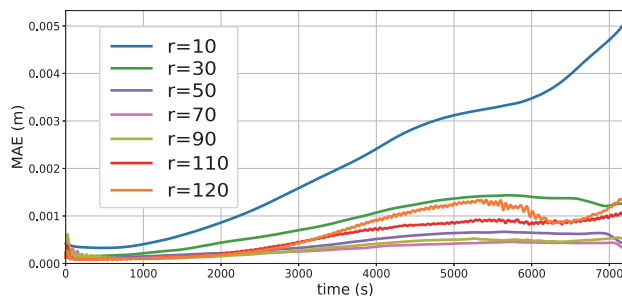


図-3 r と誤差の関係

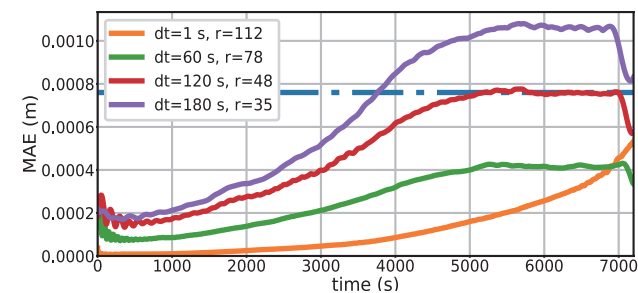


図-4 底面高の時系列データに対し DMD を行い、算出した MAE

参考文献

- 1) P.J. Schmid, J. Fluid Mech. 656, 5 (2010).
- 2) D. Moteki et al. : Capture method for digital twin of formation processes of sand bars, Physics of Fluids 34, 034117 (2022)
- 3) 河川シミュレーションソフト iRIC : <http://i-ric.org/>
- 4) 土木学会水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状小委員会、移動床流れにおける河床形態と粗度、土木学会論文報告集第 210, 1973.