

時系列データに含まれる分散不均一性の ARCH(1) による検討

法政大学 正会員 北川徹哉

1. はじめに 各種の時系列データにおいては、ある時間帯で大きな変動が連続的に発生し、別の時間帯では小幅な変動が持続するといった分散不均一性がみられることがある。本研究においては、気象庁¹⁾が観測した日最大風速の時系列データをおよそ標準正規過程に変換したものを対象とし、そこに内在する分散不均一性を調べる。

2. 検討対象の時系列データと分散不均一性の検討方法 y 年における元旦からの日数を t とし、ある地点の日最大風速を $U_{y,t}$ (> 0) とする。例として 1994 年に東京管区気象台（以降、東京）で観測された $U_{1994,t}$ を図 1(a)に、その確率分布を正規分布とあわせて図 1(b)に示す。図 1(b)のように、通常、日最大風速は非正規過程であり、そのままでは後述する分散不均一性の検討方法に適合しないことが多く、本研究においては $U_{y,t}$ に式(1)の Box-Cox 変換²⁾を用いて正規過程に近づける。式(1)のパラメータ λ の最適値 λ_y は正規分布を用いた最尤法により決定され、 $\lambda = \lambda_y$ のときの式(1)が求めるべき $\hat{U}_{y,t}$ である。図 2(a)は図 1(a)の Box-Cox 変換結果 $\hat{U}_{1994,t}$ であり ($\lambda_{1994} = -0.42$)、その確率分布 (図 2(b)) からわかるように、 $\hat{U}_{y,t}$ はほぼ正規過程となる。次に、 $\hat{U}_{y,t}$ の標本平均値 \hat{M}_y と標本標準偏差 \hat{S}_y を用いて $\hat{u}_{y,t} = (\hat{U}_{y,t} - \hat{M}_y) / \hat{S}_y$ のように標準化する。図 3 の黒色実線は図 2(a)を標準化した結果 $\hat{u}_{1994,t}$ であり、ほぼ標準正規過程 (平均値ゼロ、標準偏差 1) に従う。しかしながら、日を追って見てゆくと $\hat{u}_{1994,t}$ の平均値はゼロを中心に長周期で変動していることが観察される。本研究ではこれをドリフトと称して $\hat{m}_{y,t}$ とし、 $\hat{u}_{y,t}$ の 11 次までのフーリエ級数展開で表す。図 3 の赤色破線が $\hat{u}_{1994,t}$ のドリフト $\hat{m}_{1994,t}$ である。さらに、 $\hat{u}_{y,t}$ より $\hat{m}_{y,t}$ を差し引いてドリフトを除去したものを偏差時系列 $\hat{\varepsilon}_{y,t}$ とし、これを本研究の分散不均一性の検討対象とする。図 4 は図 3 の $\hat{u}_{1994,t}$ と $\hat{m}_{1994,t}$ より求めた偏差時系列 $\hat{\varepsilon}_{1994,t}$ であり、 $\hat{u}_{1994,t}$ にハイパスフィルターを適用したものに相当する。

本研究においては、ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity)³⁾の中で最も簡単な ARCH(1)を用いて $\hat{\varepsilon}_{y,t}$ の分散不均一性を分析する。ARCH(1)においては $\hat{\varepsilon}_{y,t}$ の t における分散 $\hat{\sigma}_{y,t}^2$ を式(2)のように表し、パラメーター ω_y および α_y は式(3)~(5)を満足するよう最尤法によって求める。この求解には \mathbf{R}^4 を用いた。なお、ARCH(1)では式(2)の右辺第 2 項がラグ次数 $q=1$ の $\alpha_y \hat{\varepsilon}_{y,t-1}^2$ のみだが、本

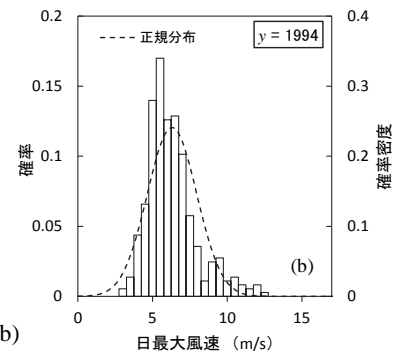
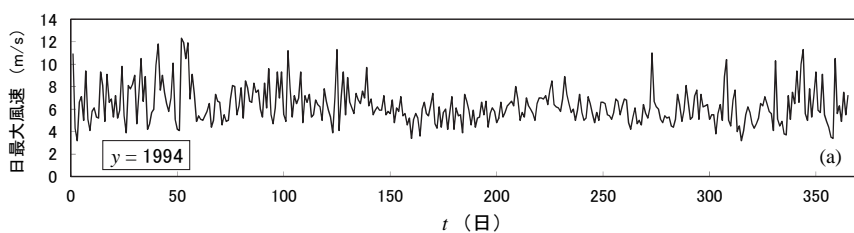


図 1 1994 年・東京における日最大風速の時系列 $U_{1994,t}$ (a) とその確率分布 (b)

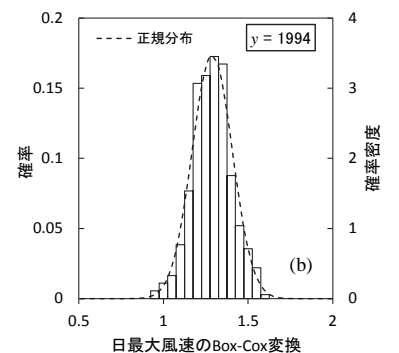
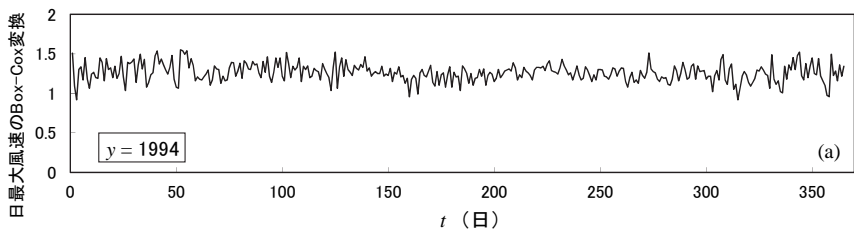


図 2 図 1 の Box-Cox 変換 $\hat{U}_{1994,t}$ (a) とその確率分布 (b)

時系列データ、日最大風速、分散不均一性、ARCH、Box-Cox 変換

〒102-8160 東京都千代田区富士見 2-17-1 電話：03-3264-4921 FAX：03-3264-9663

来, ARCH では $\alpha_{y,i}\hat{\varepsilon}_{y,t-i}^2$ の線形和 ($i=1 \sim q$) となっている.

$$\hat{U}_{y,t} = \begin{cases} \frac{U_{y,t}^\lambda - 1}{\lambda} & (\lambda \neq 0) \\ \ln U_{y,t} & (\lambda = 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$\hat{\sigma}_{y,t}^2 = \omega_y + \alpha_y \hat{\varepsilon}_{y,t-1}^2 \quad (2)$$

$$\hat{\varepsilon}_{y,t} = \hat{\sigma}_{y,t} v_{y,t} \quad (3)$$

$$v_{y,t} \sim N(0, 1) \quad (4)$$

$$\omega_y > 0, \quad 0 \leq \alpha_y < 1 \quad (5)$$

3. 分析結果

図4に示した東京の偏差時系列 $\hat{\varepsilon}_{1994,t}$ に ARCH(1) を適用して得られた分散 $\hat{\sigma}_{1994,t}^2$ を図5に示す. 式(2)に示したように $\hat{\sigma}_{y,t}^2$ は一定値の ω_y に $\alpha_y \hat{\varepsilon}_{y,t-1}^2$ の変動成分が加わった波形となっており, 図5の ω_{1994} と α_{1994} はそれぞれ 0.622, 0.277 であった. 図5の $\hat{\sigma}_{1994,t}^2$ は図4の $\hat{\varepsilon}_{1994,t}$ の変動に連動して変化していることが観察され, 例えばおよそ $t=1 \sim 60$ 日ならびに $t=300 \sim 365$ 日の冬季において $\hat{\varepsilon}_{1994,t}$ の大きな変動があり, $\hat{\sigma}_{1994,t}^2$ も同じ t の区間で大きな値が続いている. また, $\hat{\varepsilon}_{1994,t}$ には $t=273$ 日に台風26号にともなう大きな変動があり, $\hat{\sigma}_{1994,t}^2$ にもこれに対応する極大値がある.

一方, 図5の東京における ω_{1994} と α_{1994} の P 値はそれぞれゼロと約 0.002 であったことから, 有意水準 5% を用いると, ω_{1994} と α_{1994} のいずれの値にも信頼性があると判定される. これは $\hat{\varepsilon}_{1994,t}$ が ARCH(1) の構造を持つことを意味し, $\hat{\varepsilon}_{1994,t}$ には ARCH(1) に基づく分散不均一性が存在すると解釈される. さらに, 東京を含めて全国 116 地点の气象台・測候所において観測された,

$y=1961 \sim 2017$ 年の 57 箇年の $U_{y,t}$ について $\hat{\varepsilon}_{y,t}$ をそれぞれ作り, ARCH(1) を適用して ω_y および α_y を求めた. ω_y の P 値はすべてのケースにおいてほぼゼロであったが, α_y の P 値はゼロから 1 の範囲でばらついたことから, α_y の P 値に有意水準 5% を適用して ARCH(1) 構造の有無を判定する. 図6に算出されたすべての ω_y と α_y との組み合わせを示す. ここで黒色のマーカーは ARCH(1) 構造を持つと判定されたケース, 灰色のマーカーは ARCH(1) 構造を持たないと判定されたケースを表す. ω_y の値が大きく, α_y の値が小さいときに ARCH(1) 構造を持たない傾向があり, それらのケースでは $\hat{\varepsilon}_{y,t}$ に分散不均一性はなく, 分散は t にかかわらずほぼ一様であることを意味する. なお, ARCH(1) 構造を持つと判定されたケースは全ての地点・年の $\hat{\varepsilon}_{y,t}$ のうちの約 33% であり, 有意水準を 10% に緩めると約 48% に増加した.

参考文献 1) 気象庁ホームページ : <http://www.jma.go.jp/jma/index.html>, 2022. 2) Box, G. E. P. and Cox, D. R. : An analysis of transformations, *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, Vol.26, pp. 211-252, 1964. 3) Engle, R. F. : Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, pp. 987-1007, 1982. 4) The R Project for Statistical Computing : <https://www.r-project.org>, 2022.

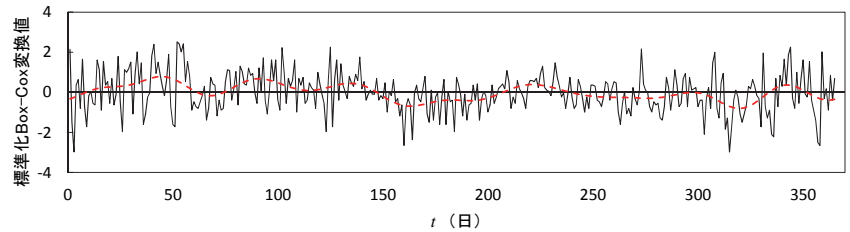


図3 図2(a)の標準化時系列 $\hat{u}_{1994,t}$ (黒色実線) とそのドリフト $\hat{m}_{1994,t}$ (赤色破線)

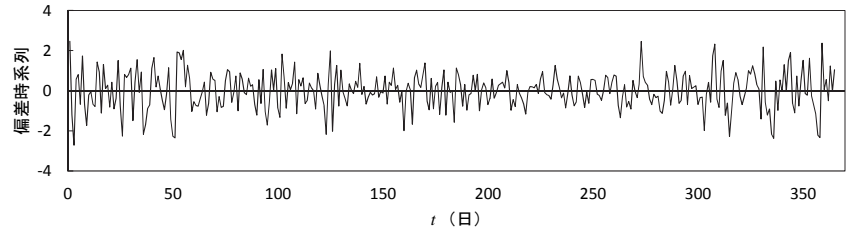


図4 図3の偏差時系列 $\hat{\varepsilon}_{1994,t}$

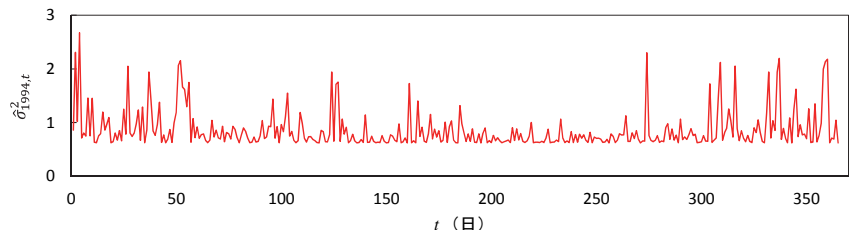


図5 図4の ARCH(1) 分散 $\hat{\sigma}_{1994,t}^2$ の時系列

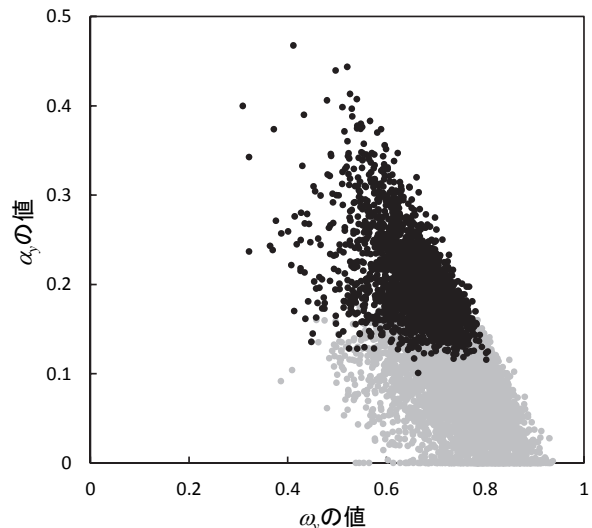


図6 各地点・各年における ω_y と α_y (●: α_y の P 値 が 0.05 未満のケース, ●: α_y の P 値 が 0.05 以上のケース)