

適応型ガウス過程回帰を用いた効率的なデータ同化

東京都市大学 学生会員 ○中村 朋佳
 東京都市大学 正会員 吉田 郁政
 東北大学 正会員 大竹 雄

1. はじめに

予測解析で使用する初期条件，解析パラメータなどの値は一般に不確実性を有する．このような不確実性を減少させるための手法として観測データに基づいてパラメータなどを更新し，数値解析に取り入れるデータ同化¹⁾がある．データ同化の代表的手法として，Particle Filter(以下 PF)¹⁾が挙げられる．PFはベイズ更新の方法の1つであり，比較的容易に実装することが可能だが少数の粒子に重みが集中し，計算性能が低下する退化が生じる場合がある．多数の粒子を使用することで退化を回避することが可能であるが，計算コストが高くなる．

近年，信頼性解析において代理モデルがその計算コストの低さから注目されている．確率論に基づく空間分布推定手法であるクリギングを代理モデルとして活用し，適応的にサンプル点を追加するAdaptive Krigingを信頼性解析に適用した手法としてEchard et al.のAK-MCS²⁾が注目されている．AK-MCSでは学習関数を使用し，代理モデルを形成する評価点を追加していくことで，効率的に限界状態の推定を行う．

本報告では，ガウス過程回帰(Gaussian Process Regression, GPR)³⁾による代理モデルを使用したデータ同化手法としてAGPR(Adaptive GPR)を提案する．効率的に事後分布の推定を行うために新たな学習関数を提案し，例として2次元の線形問題，8次元の圧密沈下問題に適用した結果を報告する．

2. 提案手法 AGPR 及び学習関数の概要

提案手法ではGPRを用いて代理モデルを構築することで，事後確率密度分布を推定する．以降，代理モデル構築のための評価点(function call, 以下 FC)を”サンプル”と呼ぶ．代理モデルを構築する際のサン

プルを効率的に追加していく上で重要となるのが学習関数 $U(\mathbf{x})$ (Learning function, 以下 LF)である．提案手法の LF は GPR で推定された事後の確率密度の平均 $\mu_g(\mathbf{x})$ とその標準偏差 $\sigma_{\text{posterior}}(\mathbf{x})$ ，事前の標準偏差 $\sigma_{\text{prior}}(\mathbf{x})$ で構成する．

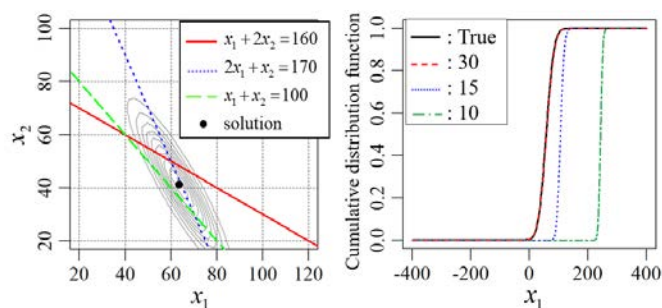
$$U(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x})(\mu_g(\mathbf{x}) - \min(n_{\text{cal}})) \quad (1)$$

$$r(\mathbf{x}) = \sigma_{\text{posterior}}(\mathbf{x}) / \sigma_{\text{prior}}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

式(1)の $(\mu_g(\mathbf{x}) - \min(n_{\text{cal}}))$ は事後の確率密度が最も大きくなる点を探索する役割， $r(\mathbf{x})$ は式(2)に示すように事後と事前の標準偏差の比であり一度計算した点を避ける役割を担う．適応型学習では効率的に追加点の探索を行うために LF の値が最も大きくなる点，すなわち GPR で推定された確率密度が大きい，かつ不確実性が大きい点を次のサンプル，つまり FC の点とする．追加されたサンプル，その確率密度の値を基に代理モデルを更新し，それを事後確率密度分布の推定分布とする．この手順を繰り返すことで代理モデルを更新して高精度化を行う．

3. 2次元線形問題への適用結果

3つの観測情報が得られた際の2次元の事後分布を推定する問題に適用する．この問題は理論解が存在する．事前情報として変数 x_1, x_2 はそれぞれ $N(0, 100^2)$ の正規分布に従う確率変数とする．図-1(1)中



(1) 真値 (2) x_1 の推定結果

図-1 2次元問題への適用例

キーワード Active learning, データ同化, 学習関数, ガウス過程回帰, 圧密沈下

連絡先 〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1 東京都市大学 都市工学科 T E L 03-5707-0104

の3本の線が観測情報を表し、それぞれの観測量誤差の標準偏差の大きさを30とした。図中の黒丸が理論解、等高線が真の事後分布を示している。

AGPRで30回FCの更新を行ったうち、パラメータ x_1 に関してFCが10, 15, 30回目の確率密度関数の推定結果を図-1(2)に示す。30回程度のFCでほぼ真値と一致し、良好な推定ができています。

4. 8次元の圧密沈下問題への適用

対象地盤は1,5層目が砂層、2-4層目が粘性土の計5層から成り、その断面図を図-2に示す。数値解析では土/水連成有限要素法を使用し、1,5層目は線形弾性モデル、2-4層目はCam-clayモデルを用いた。使用したメッシュは盛土の対称性から右半分のみをモデル化した。時間 t における盛土荷重 f_t を以下の式でモデル化し、荷重強度および载荷パターンを制御するパラメータ α , β に加え2-4層目の圧縮指数、透水係数の計8つを推定対象とした。

$$f_t = \begin{cases} \alpha F_0 \{(\exp(\beta t) - 1) / (\exp(\beta T) - 1)\} & t \leq T \\ \alpha F_0 & t > T \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 T は盛土施工にかかる日数、 F_0 は盛土施工完了時の盛土高さに対応する荷重強度である。盛土中心点直下の4地点S1-S4を対象に表-1に示す範囲内で各パラメータそれぞれ一様分布を仮定し、2万回MCSを行ったうちの1つにノイズを加えたものを観測情報とした。図-3に例としてS1地点の観測情報を示す。

比較のためPFによるパラメータ同定も行った。PFでは表-1に示す範囲の一様分布に従う2万粒子、AGPRではFC=500に基づく計算を行った。PF及びAGPRによるパラメータ α , β の推定結果のヒストグラムを図-4に示す。図中の点及び等高線図はAGPRによるFCの点、及び推定された事後確率分布を表している。感度があるパラメータ β のヒストグラムは両者がほぼ一致し、500回のAGPRで2万回のPFと同程度の精度の推定ができています。

5. おわりに

本報告ではGPRによる代理モデルを使用したデータ同化手法としてAGPRの提案を行い、8次元の圧密沈下問題に適用した結果、効率的に事後分布の推定が行えることを確認した。

参考文献

- 1) 樋口知之：予測にいかす統計モデリングの基礎—ベイズ統計入門から応用まで、講談社、2011。
- 2) 持橋ら：機械学習プロフェッショナルシリーズ ガウス過程と機械学習、講談社、2019。
- 3) Echard et al.: AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation, Structural Safety, Vol.33, No.2, pp.145-154, 2011。

表-1 数値解析で用いたパラメータの範囲

	Parameter	Range
Loading condition	$\log_{10} \alpha$	-0.1 - 0.1
	$\log_{10} \beta$	-1.7 - 0.2
Layer 2-4	$\log_{10} \lambda$	-0.4 - 0.17
	$\log_{10} k$ (m/s)	-3.0 - 1.0

λ : Compression index, k : Coefficient of permeability (m/s)

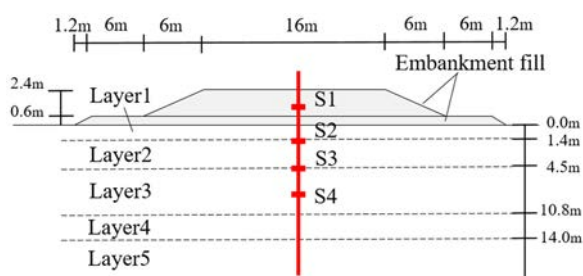


図-2 対象とする盛土地盤の断面図

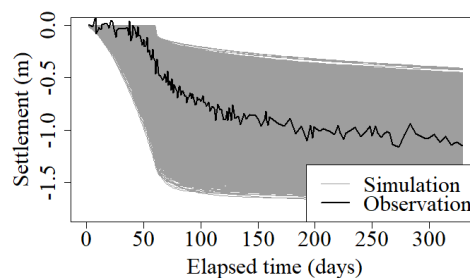


図-3 2万回のMCS及び観測情報(S1)

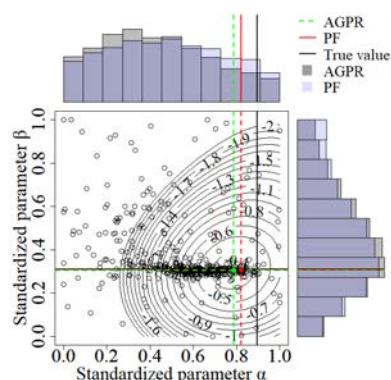


図-4 PF, AGPRの推定結果の一例(α - β)