

SPH 法における高精度 2 階微分モデルの検討

九州大学 学生会員 ○藤岡 秀二郎
九州大学 学生会員 辻 勲平
九州大学 正会員 浅井 光輝

1. 緒言

SPH, MPS などの粒子法では, 一般的に着目粒子から近傍粒子までの距離に応じた固定したカーネル関数(重み関数の一種)を使った内挿近似を行うため, 規則的な粒子配置の場合のみ, 計算精度が担保される. 粒子配置が乱れるほど近似精度が低下するため, 粒子配置が規則的な状態へと再配置を行う粒子のシフティング法と, 粒子の乱れに応じた近似モデルの補正の併用が高精度化に繋がる. 勾配モデルの補正については広く用いられているのに対し, 2 階微分の離散近似モデルでは補正が与えられることがほとんどない.

そこで本研究では, Taylor 展開の 2 次の項までを満足する 2 階微分モデルの提案とその精度検証を行った. また, 高精度化の一環として粒子配置を規則的な状態へと再配置を行う粒子のシフティング法の動作確認を行った.

2. 高精度な離散微分モデルの導出

2. 1. 一般的なモデルの問題点

標準的な SPH 法の離散微分モデルでは, 離散化前の積分形式でのみ成立する近似, あるいは離散化後の規則的な粒子配置でのみ成立する近似を使った導出をするため, 導出された離散微分モデルの打切り誤差の評価が困難であった. そこで本研究では, 離散微分モデルとして, Taylor 展開の 2 次の打切り誤差に留めた近似が成立するモデルを提案する.

2. 2. 勾配モデル

勾配補正モデルは Taylor 展開の 1 次の打切り誤差を保証するため, 勾配補正行列 L を定義し, 標準的な勾配モデルに補正行列を作用することで高精度化を実現している.

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi \rangle_i &:= L_i \sum_j V_j (\phi_{ij} - R) \nabla w_{ij} \\ &\approx \sum_j V_j \phi_{ij} L_i \nabla w_{ij} =: \sum_j V_j \phi_{ij} \tilde{\nabla} w_{ij} \quad (1) \end{aligned}$$

$$L_i := \left[\sum_j V_j (\nabla w_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}) \right]^{-1} \quad (2)$$

V_j は j 粒子の代表体積, ϕ_i は i 粒子の物理量 ($\phi_{ij} = \phi_j - \phi_i$), w_{ij} は j 粒子の i 粒子に対する重み, \mathbf{r}_i は i 粒子の位置ベクトル ($\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$) を示す. R は Taylor 展開の剰余項であり, この場合は 2 次以上の高次項となる. つまり, 上記の勾配補正モデルは 2 次の項以上の高次の項を無視した 1 次精度のモデルである.

2. 3. 2 階微分モデル

先の勾配補正モデルは, Taylor 展開の 2 次の項以上の剰余項を含んでいたことを踏まえ, 離散近似した勾配補正モデルを代入した後も Taylor 展開の 2 次の打切り誤差に留めるように, 2 階微分の離散近似モデルを導出した. 2 次元の場合, この補正 2 階微分モデルは次式となり, 式(3)の左辺に含まれる係数行列の逆行列を求めることで 2 階微分をそれぞれ評価することができる.

$$\begin{aligned} &\sum_j V_j \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^4} \mathbf{q}_{ij} \mathbf{p}_{ij}^T \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right]^T \\ &= 2 \sum_j V_j \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^4} \mathbf{q}_{ij} \left(\phi_{ij} - \mathbf{r}_{ij}^T \sum_k V_k \phi_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \right) \quad (3) \end{aligned}$$

ただし, \mathbf{q}_{ij} と \mathbf{p}_{ij} は次の式で定義される.

$$\mathbf{q}_{ij} := [x_{ij}^2 \quad y_{ij}^2 \quad x_{ij} y_{ij}]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{p}_{ij} := [A(x, x) \quad A(y, y) \quad A(x, y)]^T \quad (5)$$

$$A(a, b) := a_{ij} b_{ij} - \mathbf{r}_{ij}^T \sum_k V_k a_{ik} b_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \quad (6)$$

3. 微分可能な既知関数による離散微分評価の誤差評価

3. 1. 数値実験の概要

精度検証は, 一般的なラプラシアンモデルである NORMAL と既往研究¹⁾で提案されている 3 つのモデル NAIVE(2*), SUM(2*), INVERSE(2*), 式(3)の係数行列の近似数を変化させた 3 つのモデル NAIVE(2), SUM(2), PART_INVERSE(2), 提案モデルである FULL_INVERSE(2) の計 8 つのモデルの比較を行った.

キーワード 粒子法, SPH 法, ラプラシアン

連絡先 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 九州大学 構造解析学研究室 TEL: 092-802-3370

ここで、(2*)は混合微分を除いて導出されたモデル、(2)は混合微分を含めて導出したモデルである。

検証は式(7)に示す関数を理論解とし、規則的な粒子配置と乱れを与えた場合で行った。また誤差評価関数はRMSE (Root Mean Squared Error) とした。

$$\phi(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (0 \leq x, y \leq 2) \quad (7)$$

3. 2. 数値実験の誤差評価

検証結果を図-1, 図-2 に示す。一般的なラプラシアンモデルである NORMAL では、乱れの有無に関わらず収束性は見られなかった。また、乱れがある場合、混合微分を除いたモデル(2*のシリーズ)の間では大差はなく、混合微分を含めたモデル(2のシリーズ)では導出時の近似が少ないほど高精度なモデルであることが確認できた。続いて、FULL_INVERSE(2)より導出した混合微分においても同様の検証を行った。その結果、混合微分においても提案モデルと同程度の精度が得られた。

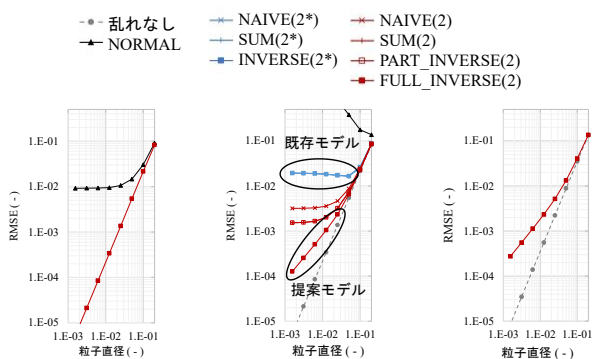


図-2. 混合微分の結果

4. シフティング法と高精度離散微分モデルを併用した流体解析

4. 1. 解析手法・モデル

ここでは、非圧縮性流体を ISPH (Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics) 法で解いた際の性能を確認する。微分可能な既知関数を用いた精度検証の結果より、高精度離散微分モデルであっても、粒子配置のわずかな乱れにより精度の低下が生じることが確認された。そのため、粒子配置を規則的な状態へと近づける PS (Particle Shifting) 法を併用した際の性能を評価した。解析はキャビティ流れを対象とし、解析モデルは一辺を 100 (cm) とした正方形流体で、初期粒子配置は一辺が100 粒子の正方格子状の均等配置とした。壁面は非すべり条件とし、上壁に壁面速度 $u_{wall} = 100$ (cm/sec) を与えた。この際レイノルズ数 Re が1000と

なるよう各種パラメータを調節した。また理論値として Ghia et al. (1982)²⁾を採用した。

図-3 に示す解析結果を見ると、一般的なモデルに比べ提案モデルである FULL_INVERSE(2)において理論値に近い値をとっていることが確認できるが提案モデルでの結果と理論値を比較すると、大きな差が生じている。これは本研究において、壁面の境界条件として仮想マーカーを利用した方法を採用しており、壁面境界におけるノイマン境界条件を厳密に満たしていないため上記のような差が生じたと考えられる。

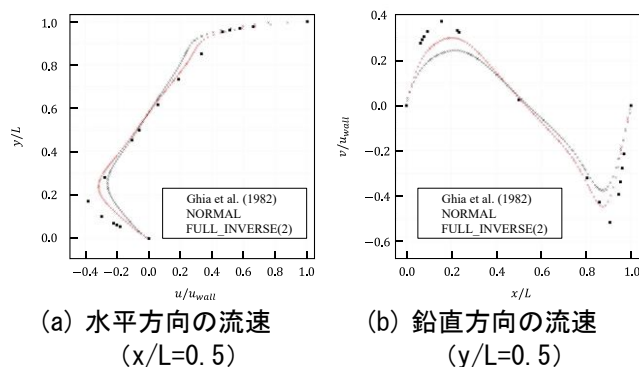


図-3 定常状態での解析結果

4. 結言

本研究では、空間2次精度を有する SPH 法用の高精度な離散微分演算モデルを導出し、シフティング法と併用化した高精度流体解析法を提案した。提案モデルはラプラシアンのみでなく、2階微分をそれぞれ評価することができるため、異方性を有する問題、あるいは座標変換が必要となる数値解析法への展開も可能である。

本研究で実施した流体解析では提案モデルの優位性が確認できたが理論値との比較による妥当性は確認できなかった。そのため、壁面境界条件を最適化したのち提案モデルの妥当性確認を実施し、さらに、他のモデルにおいても同様の検証を行い、計算コストの兼ね合いからも最適な離散微分モデルの検討を行う予定である

参考文献

- 1) Josip Basic, Nastia Degiuli, Dario Ban: A class of renormalised meshless Laplacians for boundary value problems, *J. Comput. Phys.*, Vol.354 pp.269-287, 2018.
- 2) U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin: High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *J. Comput. Phys.*, Vol.48 pp.387-411, 1982.