# 平行平板間流れを対象としたweak boundary conditionの基礎検討

日本大学大学院　学生会員　○王　聡
日本大学　正会員　長谷部　寛

## 1．背景と目的

土木構造物まわりの流れを解く際に，構造物表面に対して通常は流速がゼロとなる基本境界条件を与える．さらに，そのような壁面境界近傍に形成される流れの境界層を精度良く解くために，十分な解像度を有するメッシュ分割を行う．しかし，メッシュを細かくすると解析にかかる時間やコストが増大する．また，複雑形状の物体まわりに形成される境界層や剥離流を事前に正確に予測することも困難である．

このような困難な点を解消する方法として，基本境界条件を弱く与えるweak boundary condition（以下，weak B. C.）がBazileves and Hughesにより提案された[1]．Weak B. C.は，古典的なペナルティ法に不連続ガラーキン法の考えを持ち込んだもの，もしくはNitscheの方法と解釈され，ペナルティ法で導入される境界積分項に加えて，安定化を図るための項が付随する．しかし，構造物まわりの流れのような複雑な流れ場に対して，それぞれの項が果たす役割は明確でない．

そこで本研究では，weak B. C.の各項の役割を明確化するため，平行平板間流れを対象に検討した．本報告では，ペナルティ法による項のみを扱い，ペナルティパラメータと解の振る舞いを検証した．

## 2．解析手法

本研究では，書籍[2]付属の安定化有限要素法に基づく非圧縮粘性流れ解析プログラムを用いた．支配方程式は次式で示す無次元化された連続条件式およびNavier-Stokes方程式である．

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\tilde{\nu}\frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2}=b_i \tag{2}$$

ここで，$u_i$は$i$方向の流速成分，$p$は圧力，$\tilde{\nu}=1/Re$，$Re$はレイノルズ数，$b_i$は物体力である．

上記の支配方程式を，SUPG/PSPG安定化有限要素法により離散化する．用いた要素は三角形1次要素である．離散化された方程式は以下のとおりである．

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega w_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)d\Omega \\
&+\int_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij}+\tilde{\nu}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)d\Omega+\int_\Omega q\frac{\partial u_i}{\partial x_i}d\Omega \\
&+\sum_e\int_{\Omega_e}\tau_m^e\left(u_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+\frac{\partial q}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}\right. \\
&\left.-\tilde{\nu}\frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2}\right)d\Omega \\
&=\int_{\Gamma_h} w_i\left(-p\delta_{ij}+\tilde{\nu}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)n_j d\Gamma
\end{aligned} \tag{3}$$

時間積分法はCrank-Nicolson法を用い，連立一次方程式の解法にはGPBi-CG法が用いられている．

## 3．Weak Boundary Condition

滑り無し条件を与える物体表面近傍の境界層の要素分割が十分でない場合，特に乱流域では解析精度が低下する．この欠点を回避するため，Bazilevesらによりweak boundary conditionが提案された．Weak B.C.は式(3)の右辺に以下の境界積分項を追加する．

$$\begin{aligned}
&\sum_e\int_{\Gamma_b} w_i\left(-p\delta_{ij}+\tilde{\nu}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)n_j d\Gamma \\
&+\sum_e\int_{\Gamma_b}\left(-q\delta_{ij}+\tilde{\nu}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)n_j u_i d\Gamma \\
&-\sum_e\int_{\Gamma_b}\tau_P w_i(u_i-\overline{u_P})d\Gamma
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$\Gamma_b$はweak B.C.を適用する境界，$\tau_P$はペナル

キーワード：Weak boundary condition，ペナルティ法，平行平板間流れ
連絡先　：〒101-8308　東京都千代田区神田駿河台1-8-14

ティパラメータ，$\overline{u_p}$は weak に課す境界条件である．

本研究ではこれらの項の振る舞いを検討するが，本報告ではその第一歩として，ペナルティ項のみを考慮し，ペナルティパラメータが解に及ぼす影響を検討する．

## 4．解析条件と結果

Weak B.C.を適用した平行平板間流れの 2 次元解析を行った．解析条件とメッシュを図-1 に示す．領域高さ 1h，領域幅 10h，節点数 1071，要素数 2000 のメッシュを作成した．

解析メッシュの左辺に Re=100 に相当する一様の流速を与え，流出境界はトラクションフリーとした．解析領域の上方境界にスリップ条件を与え，下方境界に Weak B.C.を用いた．

解析ケースを表-1 に示す．ペナルティパラメータの値を変えて解の変化を検討した．比較のため，下面を slip 条件，no-slip 条件とした場合の解析結果を図-2, 3 に示す．ペナルティパラメータが 0.1 の場合，下面で若干の流速低下が見られた (図-4 (a))．ペナルティパラメータが 1.0 と 3.0 の場合，下面境界流速はほぼゼロに漸近した（図-4 (b)，(c)）．

図-5 に各ケースの流出境界における流れ方向の節点流速分布をまとめる．図 2～4 に示した可視化結果と同様に，ペナルティパラメータを大きくすることで no-slip 条件に漸近することが確認できた．なお，ペナルティパラメータを 3.0 よりさらに大きくすると解析が破綻した．

## 5．まとめ

ペナルティ項のみを実装した Weak B.C.を適用した平行平板間流れの解析を行った．ペナルティパラメータを大きくすると no-slip 条件に近づくことが確認できた．今後は，式(4)の第 1 項，第 2 項を加えた際に安定化が図れるかを確認する．

## 参考文献

1) Y. Bazilevs and T. J. R. Hughes : Weak imposition of Dirichlet boundary conditions in fluid mechanics, Compt. Fluids, Vol.36, pp.12-26, 2007

2) 日本計算工学会『有限要素法による流れのシミュレーション』丸善出版，2017

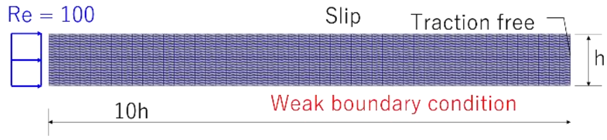



図-1 解析条件とメッシュ

表-1 解析ケース

| ケース | ペナルティパラメータ |
|---|---|
| 1 | 0.1 |
| 2 | 1.0 |
| 3 | 3.0 |

図-2 下面 slip 条件の流速ベクトル

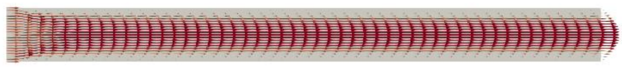
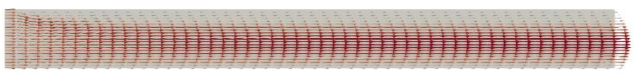
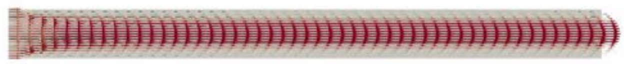


図-3 下面 no-slip 条件の流速ベクトル



(a) ペナルティパラメータ 0.1

(b) ペナルティパラメータ 1.0



(c) ペナルティパラメータ 3.0

図-4 Weak boundary condition を用いた際の流速ベクトル

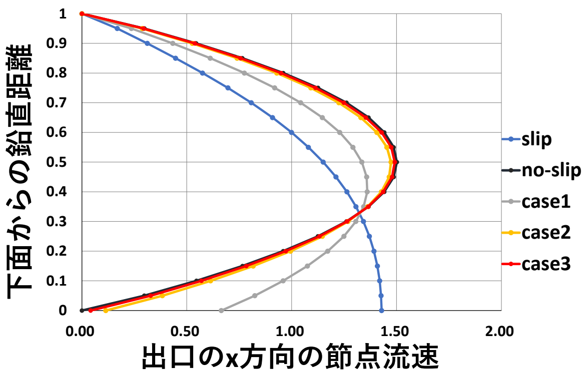



図-5 流出境界の流れ方向節点流速分布