スプライン関数の特性を考慮したIGAはり要素の構築

日本大学大学院　　学生会員　○唐澤　奈央子
日本大学　　正会員　　長谷部　寛

1. はじめに

土木構造物の構造設計において，詳細な検討には有限要素解析が広く用いられている．用いられる要素の種類には，はり要素，シェル要素，ソリッド要素などがあるが，曲げ変形が卓越するような細長い部材にははり要素が用いられる[1]．はり要素の代表的な要素の1つであるベルヌーイ・オイラーはり要素は，要素間のたわみ角を連続にするために形状関数に C^1 連続の関数である3次エルミート多項式を用いる．そのために，未知変数には節点におけるたわみとたわみ角が含まれる．

一方で，厳密な形状で解析できる手法として提案されたアイソジオメトリック解析(＝IGA)[2]は，CADの形状表現に用いられるB-SplineやNURBSなどのスプライン関数を基底関数に用いる．これらの関数は C^{p-1} 連続の関数であることから，たわみの微分値であるたわみ角の連続性は要素間で自動的に保持される．

アイソジオメトリック解析におけるはり要素に関するいくつかの論文[3), 4)]では，はり要素の定式化が若干異なる．そのため土木構造物を対象とした解析において最適な定式化を模索する必要がある．そこで本研究はたわみの近似関数にたわみ角を含めず，たわみのコントロールポイント変数とB-Spline基底関数で構成し，等分布荷重が作用する単純ばりを対象に，要素性能をはり全体の相対誤差のノルムにより評価した．

2. B-Spline曲線と基底関数

B-Spline 曲線$\mathbf{C}(\xi)$はコントロールポイントの座標値により構成される位置ベクトル$\mathbf{B}_i$とB-Spline基底関数$N_i^p(\xi)$(式(2))の線形結合として式(1)で表される．

$$\mathbf{C}(\xi)=\sum_{i=1}^{n}N_i^p(\xi)\mathbf{B}_i \tag{1}$$

・$p=0$の場合

$$N_i^0(\xi)=\begin{cases}1 & (\ \xi_i\le\xi\le\xi_{i+1})\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{2a}$$

・$p\ge 1$の場合

$$N_i^p(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_i^{p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1}^{p-1}(\xi) \tag{2b}$$

ここで，nはコントロールポイント数，pは次数，iはコントロールポイントの番号，ξ_iはノットと呼ばれるパラメータであり，局所座標値である．

3. 支配方程式と離散化

支配方程式にはベルヌーイ・オイラーはりの微分方程式を採用し(式(3))，弱形式化した後(式(4))，Galerkin 法に基づいて離散化した(式(5))．また，たわみの近似式はたわみ角を含めずに式(6)のように構成した．例としてB-Spline基底関数の次数2次，要素数3要素の場合のノットとコントロールポイント位置を図-1に，たわみの近似式を式(7)に示す．図中の○はコントロールポイント，△はノットを示しており，ノットは要素の区切り位置を表している．

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4}=q \tag{3}$$

$$EI\int_0^L\frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{d^2\widehat{w(x)}}{dx^2}dx=\int_0^L q\,\widehat{w(x)}dx \tag{4}$$

$$\mathbf{KW}=\mathbf{F} \tag{5}$$

$$w(x)=\sum_{i=1}^{p+1}N_i^p(x)w_i \tag{6}$$

・要素1

$$w(x)=N_1(x)w_1+N_2(x)w_2+N_3(x)w_3 \tag{7a}$$

・要素2

$$w(x)=N_2(x)w_2+N_3(x)w_3+N_4(x)w_4 \tag{7b}$$

・要素3

$$w(x)=N_3(x)w_3+N_4(x)w_4+N_5(x)w_5 \tag{7c}$$

ここで，Eはヤング率，Iは断面二次モーメント，qは分布荷重，$w(x)$はたわみ，$\widehat{w(x)}$は重み関数，$\mathbf{K}$はB-Spline 基底関数から計算される剛性行列，$\mathbf{W}$はコントロールポイントにおける未知変数ベクトル，$\mathbf{F}$は外力ベクトル，w_iはコントロールポイント変数である．

4. 解析条件と解析結果

4.1. 解析条件

解析モデルと境界条件を図-1に示す．等分布荷重が作用する単純ばりを対象として検討を行った．基底関数の次数は2次～4次とし，要素数は2次と3次は1～20要素，4次は1要素のみとした．

キーワード　アイソジオメトリック解析，B-Spline基底関数，はり要素，単純ばり
連絡先　〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14

4.2　たわみ分布の算出

方程式を解いて得られた解を式(6)に代入し，たわみの関数を得た．1 要素のときのたわみ分布を算出した結果を図-3 に示す．B-Spline 基底関数の次数が 4 次の場合，等分布荷重の作用する単純ばりのたわみの理論解が 4 次で表されるため，1 要素で理論解に一致することを確認した．一方，2 次と 3 次については 1 要素では理論解に一致しなかったことから，次節以降で要素数を増やした検討を行った．

4.3　評価方法

本研究は方程式で得られた解を直接その位置のたわみとして扱うのではなく，得られた解を用いて導出したたわみの近似関数により評価を行っている．このような処理を行う理由は，得られた解がコントロールポイントの座標値におけるたわみを表しているとは限らないためである．これは，本研究が直線の部材を対象としており，コントロールポイントの座標値を用いずにたわみ関数を導出できるためである．

はり全体を定量的に評価するために，全体の相対誤差のノルムを算出する．有限要素解析では各節点における誤差を求めてそれらを合計して算出すればよいが，アイソジオメトリック解析では上記のような処理を行っているためコントロールポイントの値を用いてはり全体を評価することはできない．そこで本研究では，はり全体を 100 分割し，各分割位置におけるたわみの値をたわみの近似関数から算出した．その後，式(8)により全体の相対誤差のノルムを算出した．

$$\frac{1}{M}\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left(u_{i,a}-u_{i,exact}\right)^{2}} \tag{8}$$

ここで，Mは分割数+1，$u_{i,a}$は分割位置におけるたわみ，$u_{i,exact}$は分割位置におけるたわみの理論解である．

4.4　要素性能評価

式(8)により相対誤差を求め，横軸を要素長として整理した結果を図-4 に示す．2 次の場合要素長の 2 乗に比例して減少し，3 次の場合要素長の 4 乗に比例して減少する結果が得られた．

5.　まとめ

アイソジオメトリック解析で用いられるスプライン関数の特性に着目して，たわみのみでたわみの近似関数を構成する IGA はり要素を構築し，はり全体で要素の性能評価を行った．

その結果，相対誤差は 2 次の場合要素長の 2 乗比例して減少し，3 次の場合要素長の 4 乗に比例して減少することが分かった．また，4 次の場合は 1 要素で理論解に一致することが分かった．

今後の予定として，たわみ角を境界条件に含む片持ちばりの解析を行う必要がある．

参考文献

1) 山田貴博：高性能有限要素法，丸善，2007.
2) J. A. Cottrell，T. J. R. Hughes，Y. Bazilevs：Isogeometric Analysis-Toward Integration of CAD and FEA，Wiley，2009.
3) O. Weeger，U. Wever，B. Simeon：Isogeometric analysis of nonlinear Euler–Bernoulli beam Vibrations，Nonlinear Dyn. 72，813-835，2013.
4) A. M. Bauer, M. reitenberger, B. Philipp, R. Wuchner, K. -U. Bletzinger：Nonlinear isogeometric spatial Bernoulli beam，Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg. 303，101-127，2016.

図-1　2 次の基底関数，3 要素のノットとコントロールポイントの配置

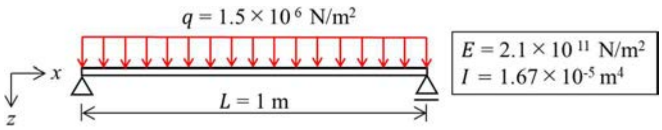

図-2　解析モデルと境界条件

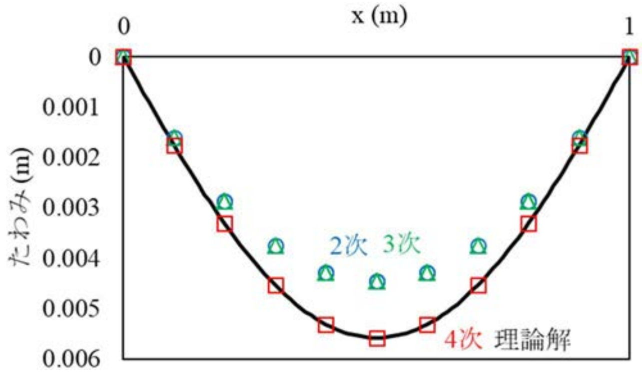

図-3　1 要素のたわみ分布

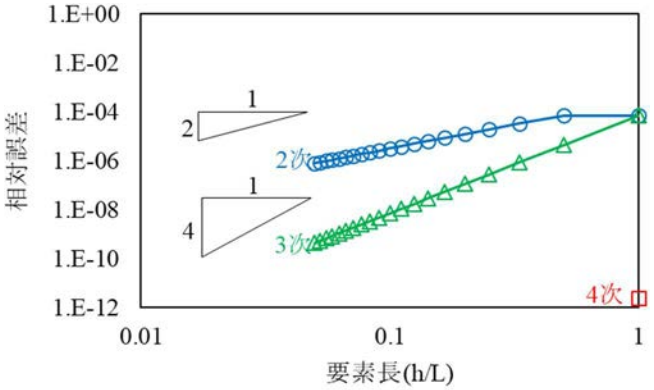

図-4　はり全体の相対誤差