IGAによる梁の動的弾性解析のメッシュ依存性

中央大学大学院　学生員　○ 吉田　也真都
中央大学　正会員　樫山　和男
日本大学　正会員　長谷部　寛

1.　はじめに

土木構造物に対して有限要素解析を行う場合，一般的にはCADにより得られた形状モデルに対して，有限要素メッシュを作成することになる．この際，形状モデルは有限要素法で用られる形状関数によって近似されるため，曲線や曲面部分においてはCADにより作成された形状と一致しない問題が発生する．近年，この問題点を解決する手法として，Hughesらにより提案されたIGA(Isogeometric Analys)[1]が注目を浴びている．この手法はCADの形状表現に用いられるSpline関数を形状関数に用いるため，CADで描かれた形状モデルを完全に表現して解析することが可能であり，形状近似の誤差を排除することができる．また，CADによる形状作成から有限要素解析までをシームレスに行える長所がある．

そこで本研究では，流体-構造連成解析に　IGAを適用するための準備として，梁の動的弾性解析にIGAを適用し，メッシュ依存性について検討を行った．

2.　数値解析手法

(1)　NURBS

本研究では形状関数に用いるSpline関数として，制御点に与えられる重みにより，少ない制御点数で様々な形状を表現できるNURBS関数を用いた．制御点とは形状を表現するための物理空間上の点である．NURBS関数は式(1)に示すよう，三方向のB-Spline基底関数により表現される．なお，B-Spline基底関数は式(2)のように表現される．

$$R^{p,q,r}_{i,j,k}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=1}^{n}\sum_{\hat{j}=1}^{m}\sum_{\hat{k}=1}^{l}N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)M_{\hat{k},r}(\zeta)w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}} \tag{1}$$

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \quad (p=0)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (p=1,2,3,\cdots) \tag{2}$$

ここで，ξ,η,ζはパラメータ空間の座標であるノット，i,j,kはξ,η,ζ方向のB-Spline基底関数を表現する制御点の番号，p,q,rは各方向のB-Spline基底関数の次数，n,m,lは各方向の制御点数，$w_{i,j,k}$は各制御点の重みである．なおξ_iはCAD形状から得られるノットベクトルの値で，IGAではこのノットベクトルの非ゼロ区間で要素が定義される．

(2)　空間方向の離散化

動的弾性解析における支配方程式は以下に示す，運動中の平衡方程式，応力ひずみ関係式，ひずみ変位関係式である．なお，本研究では物体力と減衰を考慮しないものとする．

$$-\rho\ddot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{\partial^T\sigma} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\epsilon} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial d} \tag{5}$$

ここで，ρは密度，$\boldsymbol{d}$は変位，$\boldsymbol{\sigma}$は応力，$\boldsymbol{D}$弾性係数行列，$\boldsymbol{\epsilon}$はひずみである．従来の有限要素法と同様に，支配方程式に対して仮想仕事の原理を適用し，各要素でNURBS関数を用いて変位と重み関数を補間することで式(6)を得る．

$$\boldsymbol{d}_e^{*\mathrm{T}}\int_{\Omega_e}\rho(\boldsymbol{R}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_e)\mathrm{d}\Omega\ddot{\boldsymbol{d}}_e + \boldsymbol{d}_e^{*\mathrm{T}}\int_{\Omega_e}\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_e\boldsymbol{B}_e\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{d}_e = \boldsymbol{d}_e^{*\mathrm{T}}\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{R^{\mathrm{T}}}_e\boldsymbol{t}_e\mathrm{d}\Gamma \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{d}_e^{*\mathrm{T}}$は重み関数，$\Omega_e$は要素領域，$\boldsymbol{B}_e$はBマトリックス，$\Gamma_e$は要素境界，$\boldsymbol{t}_e$は表面力である．ここで形状関数であるNURBS関数は物理空間の関数ではなく，パラメータ空間の関数であるので，変数変換を施す必要がある．また，積分を親要素で数値積分によって行うためにパラメータ空間から親要素にもう一度変数変換を施した上で，左辺行列と右辺ベクトルを作成し，要素全体で重ね合わせる．これにより空間方向に離散化された式(7)を得る．なお，本研究では数値積分にGauss求積法を用いた．

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{Kd} = \boldsymbol{F} \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{M}$は質量行列，$\boldsymbol{K}$は剛性行列，$\boldsymbol{F}$は外力ベクトルである．

(3)　時間方向の離散化

ニューマークのβ法を用いて時間方向の離散化を施す．従って，加速度は以下のように表される．

$$\ddot{\boldsymbol{d}}^{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\boldsymbol{d}^{n+1}-\boldsymbol{d}^n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\boldsymbol{d}}^n - \Big(\frac{1}{2\beta}-1\Big)\ddot{\boldsymbol{d}}^n \tag{8}$$

ここで，nは現在の時間ステップ，Δtは時間増分である．式(7)に式(8)を代入することにより，式(9)を得る．

$$\Big(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\Big)\boldsymbol{d}^{n+1} = \boldsymbol{F}^{n+1} + \boldsymbol{M}\left\{\Big(\frac{1}{2\beta}-1\Big)\ddot{\boldsymbol{d}}^n + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\boldsymbol{d}}^n + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{d}^n\right\} \tag{9}$$

式(9)を解くことにより，次ステップの変位を求めていく．なお，本研究では$\beta=\frac{1}{4}$とした．

KeyWords：　Isogeometric Analysis，片持ち梁，動的弾性解析，NURBS
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27　TEL. 03-3817-1815　Email：a16.yhft@g.chuo-u.ac.jp

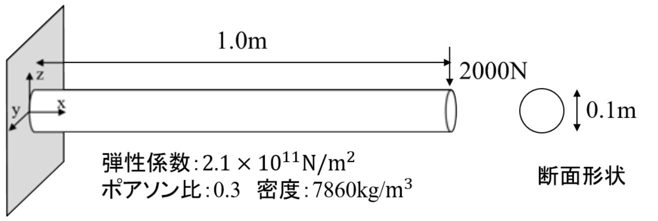

図-1 解析条件

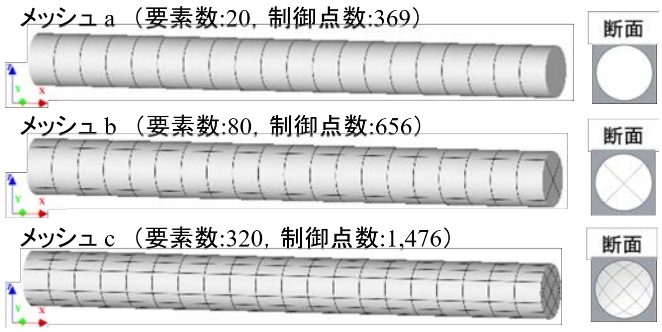

図-2 解析メッシュ

3. 数値解析例

円柱の片持ち梁における振動解析を取り上げる．

(1) 解析条件

解析条件は図-1 に示す片持ち梁で，解析メッシュは図-2 に示す三通りのメッシュを用いる．メッシュ a は断面の円が 1 要素，メッシュ b は断面の円が 4 要素，メッシュ c は断面の円が 16 要素で，円柱の長さは全て 20 分割である．また，B-Spline 基底関数の次数は全方向二次である．まず，これらのメッシュを用いて Gauss 求積の積分点数を 2∼6 まで変更して弾性解析を行い，先端に与えた荷重を除荷した後の梁の振動解析を積分点数を 6 として各メッシュで行った．なお，時間増分 Δt は 1.0×10^{-4}s で 0.03s の解析とし，本解析における梁先端の最大変位の理論解は 6.505×10^{-4}m，周期の理論解は 0.014s である．

(2) 解析結果

表-1 に各メッシュで積分点数を変えた時の弾性解析で得られた鉛直方向の最大変位を示し，図-3 に解析結果と理論解との相対誤差を示す．なお，積分点数が 2 点の場合はいずれのメッシュでも解が発散した．断面の円を 1 要素で表現したメッシュ a は積分点数を変えると，解が安定しておらず，断面を細分化したメッシュ b,c では積分点数を変えても解が安定していることが確認された．このことから，解析領域を少ない要素で完全に表現できる IGA でも，安定して高精度に解析するためには，要素の細分化を施す必要があるといえる．そして図-4 および表-2 に各メッシュで積分点数を 6 とした時の振動の様子と最大変位，変位の相対誤差，周期，CPUTime を示す．いずれのメッシュでも正しく振動解析を行えていることが確認できる．また，メッシュ c では b に比べて 6 倍以上の CPUTime を要したが，相対誤差が 0.3% 程の差しかなかったことから，本解析では断面を 4 分割することで十分な精度を得られたといえる．

表-1 各ケースにおける鉛直方向の最大変位 [m]

積分点	メッシュ a	メッシュ b	メッシュ c
3	6.680×10^{-4}	6.421×10^{-4}	6.448×10^{-4}
4	6.220×10^{-4}	6.428×10^{-4}	6.448×10^{-4}
5	6.262×10^{-4}	6.427×10^{-4}	6.448×10^{-4}
6	6.249×10^{-4}	6.427×10^{-4}	6.448×10^{-4}

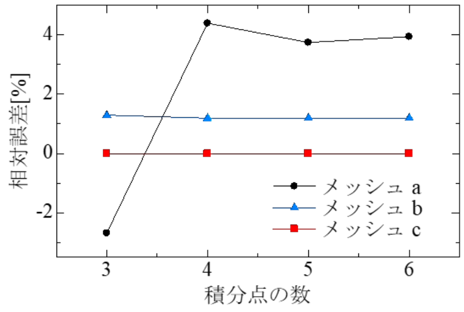

図-3 鉛直変位の解析結果と理論解との相対誤差

表-2 積分点数 6 での各メッシュにおける振動解析の結果

	最大変位[m]	変位の相対誤差[%]	周期[s]	CPUTime[s]
メッシュ a	6.249×10^{-4}	3.94	0.014	35.5
メッシュ b	6.427×10^{-4}	1.20	0.014	149.9
メッシュ c	6.448×10^{-4}	0.88	0.014	903.0

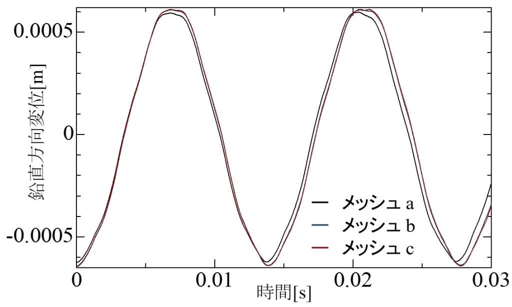

図-4 積分点数 6 での各メッシュにおける振動の様子

講演時には，解析ソフトによって二次要素を用いた有限要素法で解析した時の結果との比較を示す．

4. おわりに

本研究では，円柱片持ち梁の三次元動的弾性解析に対して IGA を適用し，メッシュ依存性について検討を行ったことで，以下の結論を得た．

- IGA では断面の形状を一要素で近似して解析を行うことが可能であり，メッシュ分割を増やすことで精度が向上する．
- 断面を 4 分割することで相対誤差が 1% 程度で解析を行うことが可能である．

今後は，通常の有限要素法解析との比較を行うとともに，流体構造連成解析を行う予定である．

参考文献

1) T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.