令和3年度土木学会全国大会第76回年次学術講演会

間隙率の異なる飽和互層地盤の地震時挙動に対する二相系定式化（u-U 定式化）の適用性向上

大成建設　技術センター　正会員 ○宇野 浩樹　非会員 船原 英樹

1. はじめに　水で飽和した地盤の挙動は，土骨格と間隙水からなる多孔質体でモデル化され，土骨格の変位 u，間隙水の変位 U，間隙水の土骨格に対する相対変位 w，間隙水圧 p によって記述される。いくつかの定式化のうち，u-U 定式化[例えば, 1)]については，広く用いられている定式化であるが，実際の地盤のように間隙率の異なる地層が堆積している場合，地層境界での流量と間隙水圧が不連続になる[2)]という課題がある。著者らは，これに伴う u-w 定式化[例えば, 3)]との誤差について 1 次元土柱モデルを例に検討し，周波数と透水係数に依存することを示している[4)]。

本研究では，流量と間隙水圧の連続性を改良した u-U 定式化を提案するとともに，適用事例として周波数と透水係数をパラメトリックに変化させた 1 次元飽和互層地盤の感度解析について示す。

2. 支配方程式　Biot の多孔質体理論による支配方程式を以下に示す（U を u^f で表記）。以下では液相の加速度の固相に対する相対移流項[2)]が十分小さいと仮定されている。微小ひずみを仮定し，土粒子は非圧縮性としている。

1. 固相のつり合い式

$$(1-n)\rho^s\ddot{u}_i^s - n^2\frac{\rho^w g}{k}\left(\dot{u}_i^f-\dot{u}_i^s\right) = \frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j} - (1-n)\frac{\partial p^w}{\partial x_i} + (1-n)\rho^s b_i \qquad \text{式(1)}$$

2. 液相のつり合い式

$$n\rho^w\ddot{u}_i^f + n^2\frac{\rho^w g}{k}\left(\dot{u}_i^f-\dot{u}_i^s\right) = -n\frac{\partial p^w}{\partial x_i} + n\rho^w b_i \qquad \text{式(2)}$$

3. 間隙水のつり合い式（加速度を考慮した Darcy 則）

$$\rho^w\ddot{u}_i^s + \frac{\rho^w}{n}\ddot{w}_i^{fs} + \frac{\rho^w g}{k}\dot{w}_i^{fs} = -\frac{\partial p^w}{\partial x_i} + \rho^w b_i \qquad \text{式(3)}$$

4. 多孔質体のつり合い式

$$\rho\ddot{u}_i^s + \rho^w\ddot{w}_i^{fs} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \qquad \text{式(4)}$$

5. 多孔質体の連続式

$$\dot{\zeta}_{kk}^{fs} = -\dot{\varepsilon}_{kk}^s - \frac{n}{K^w}\dot{p}^w,\quad \dot{\zeta}_{ii}^{fs} = \frac{\partial\dot{w}_i^{fs}}{\partial x_i} \qquad \text{式(5)}$$

6. 土骨格の構成式

$$\Delta\sigma'_{ij} = D_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^s \qquad \text{式(6)}$$

7. 有効応力の定義

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p^w\delta_{ij} \qquad \text{式(7)}$$

8. 平均相対変位の定義

$$w_i^{fs} = n\left(u_i^f - u_i^s\right) \qquad \text{式(8)}$$

u_i^s，u_i^f，w_i^{fs}は土骨格の変位，間隙水の変位と平均相対変位であり，ρ^s，ρ^w，ρは土粒子，間隙水，多孔質体の各密度である。n，k，K^wは間隙率，透水係数，間隙水の体積弾性係数であり，gとb_iは重力加速度と物体力である。

従来の u-U 定式化（以下，「u-U-1」）では式(1), (2)を用い，u-w 定式化（以下，「u-w」）では式(3), (4)を用いる。本研究で提案する u-U 定式化（以下，「u-U-2」）では，式(8)を考慮して$\dot{w}_i^{fs}$, $\ddot{w}_i^{fs}$を$\dot{u}_i^f$, $\ddot{u}_i^f$で書き換えた式(3), (4)を用い，間隙水圧p^wの連続性を常に満足させる。また，いずれの定式化においても，連続式(5)によってp^wを消去する。

離散化については，つり合い式の空間離散化に 1 次要素による FEM を適用し，時間離散化には Newmark の β 法を適用する。ここで，u-U-2 においては，要素の間隙率を節点に離散化する対角マトリックス（以下，「間隙率マトリックス」）n_Kを導入し，要素内の平均相対変位w_i^{fs}を節点での変位（u_{Ki}, U_{Ki}），形状マトリックス（N_K^u, N_K^U）によって次式のように近似する（K：要素構成節点）。$\dot{w}_i^{fs}$および$\ddot{w}_i^{fs}$も同様の考え方で近似する。

$$w_i^{fs} = n\left(u_i^f - u_i^s\right) = N_K^U n_K U_{Ki} - N_K^u n_K u_{Ki} \qquad \text{式(9)}$$

$$n_K = \left[\sum_E dV_E \Big/ \sum_E \left(\frac{dV}{n}\right)_E\right]_K \qquad \text{式(10)}$$

ここに，$\sum_E dV_E$　　：式(3)の弱形式において，各要素から当該節点Kに空間離散化される混合体の体積の合計

$\sum_E (dV/n)_E$：間隙率の逆数（$=1/n$）で重み付けした混合体の体積の合計

すなわち，u-U-2 では式(9)によって流量の連続性が常に成り立つ。さらに，n_Kを式(10)で設定することにより，節点での$\ddot{U}_{Ki}$，$\dot{U}_{Ki}$，U_{Ki}が地層境界で不連続となる応答の加重平均（重み係数dV_E）として求められることになる。

3. 解析条件　u-U-2 を適用した 1 次元土柱モデルによる感度解析について述べる。解析モデルを図 1 に示す。層厚は 40m とした。有限要素の高さは 0.2m とし，底面の鉛直変位は固定した。水理的境界条件については，底面を非排水条件，地表面を排水条件とした。土骨格の構成則は線形弾性モデルとした。間隙率 n は，要素内で一定とし，上層から深度方向 5m ピッチで 0.300, 0.450, 0.300, ･･･, 0.450 と互層状に変化させた。透水係数 k は 1.0×10^{-8}, 1.0×

キーワード　u-U 定式化，u-w 定式化，間隙率，周波数，透水係数，有限要素法
連絡先　〒245-0051　横浜市戸塚区名瀬町 344-1　大成建設（株）　技術センター　TEL 045-814-7221

10^{-7}, ･･･, 1.0×10^{-1}m/s とし，数値実験という位置付けによって，各解析ケースで均質に与えた。地盤の密度 ρ，ヤング係数 E，ポアソン比 ν は，ρ＝2.0g/cm^3，E＝2.0×10^4kN/m^2，ν＝0.25 とした。間隙水は密度 ρ^w＝1.0g/cm^3，体積弾性係数 K^w＝2.2×10^6kN/m^2 とし，重力加速度gは 9.81m/s^2 とした。荷重条件については鉛直地動加振とし，波形は加速度振幅 A_{max}＝0.1m/s^2，波数 N＝10 波の正弦波とした。一様な周波数 f は解析ケースごとに 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0, 10.0Hz と設定した。計算時間間隔 Δt は 0.001s，Newmark の β 法の係数は β＝0.3025，γ＝0.6 とした。Rayleigh 減衰は考慮していない。

詳細は割愛するが，使用した解析プログラムの妥当性については，均質な間隙率の場合に Simon et al.(1984)[3]の 1 次元弾性土柱に対する解析解と一致することを確認している。

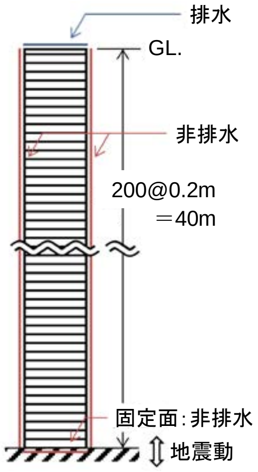

図 1　解析モデル

4. 解析結果　u-U-1，u-U-2，u-w で得られた代表的な地表面での土骨格の鉛直加速度時刻歴を図 2 に示す。図中の誤差は，u-U-1 の u-w に対する値であり，次式で求めた。

$$E_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}|\Delta A_i|}{\sum_{i=1}^{n}|A_i|} \quad (A_i：ステップ i での u\text{-}w による結果，\Delta A_i：ステップ i における u\text{-}w との差) \qquad 式(11)$$

さらに，地表面での土骨格の鉛直加速度時刻歴に対し，式(11)で求めた u-U-1 および u-U-2 の誤差の分布図を図 3 に示す。図 3 では下限値を 0.001%，中央値を 1%，上限値を 1000%として色分けしている。

これらの図より，u-U-2 においては，高周波数で高透水性の領域も含め，u-w との誤差が顕著に低減されていると言える。今回の解析条件では u-U-2 の誤差が最大でも 0.01%程度となっている。

※図中の誤差は u-U-1 の値である。

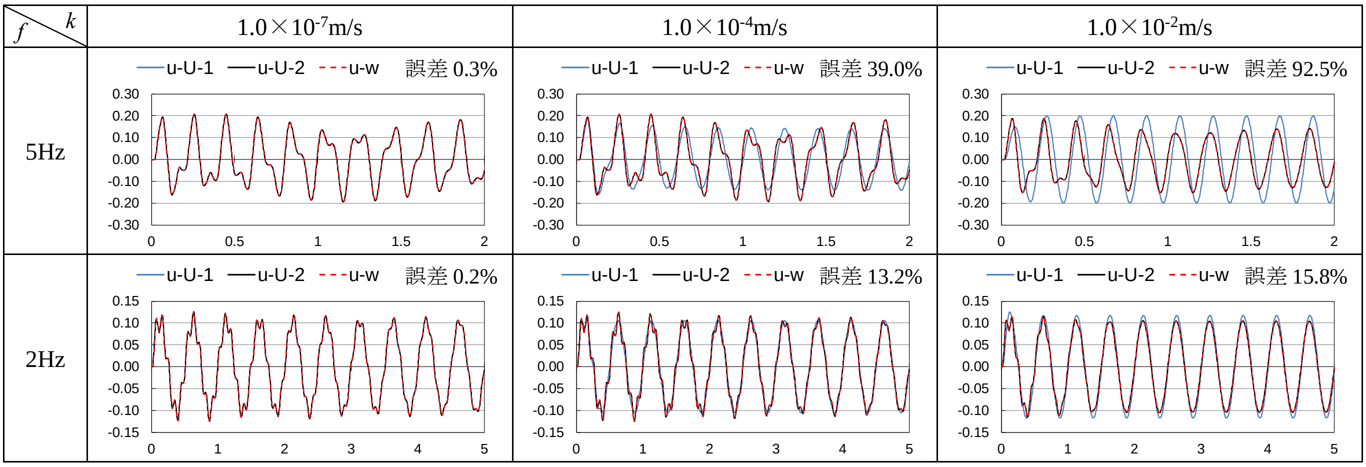

図 2　地表面での土骨格の鉛直加速度時刻歴（縦軸：$\ddot{u}_z^s$(m/s^2)，横軸：時間(s)）

(a)　u-U-1

f (Hz) \ k (m/s)	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
10	-1.7	-0.7	0.3	1.3	1.9	2.0	2.0	2.0
5	-1.6	-0.6	0.4	1.3	1.6	1.6	2.0	2.5
3	-1.6	-0.6	0.3	1.1	1.4	1.3	1.5	1.9
2	-1.7	-0.7	0.2	1.0	1.1	1.1	1.2	1.4
1	-2.0	-1.0	-0.1	0.5	0.7	0.6	0.7	0.7
0.5	-2.4	-1.4	-0.5	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1

(b)　u-U-2

f (Hz) \ k (m/s)	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
10	-13.9	-13.8	-14.0	-13.9	-8.2	-5.9	-3.8	-1.9
5	-14.8	-14.9	-15.0	-14.3	-8.4	-6.9	-4.5	-3.0
3	-15.0	-15.0	-15.0	-12.2	-9.7	-6.8	-4.7	-3.4
2	-15.0	-15.0	-15.0	-15.0	-9.9	-6.9	-4.9	-3.8
1	-15.0	-15.0	-15.0	-15.0	-11.8	-7.2	-5.3	-4.4
0.5	-15.0	-15.0	-15.0	-15.0	-15.0	-7.5	-5.8	-5.1

1000%　1%　0.001%

図 3　地表面における土骨格の鉛直加速度の誤差分布（図中の数値：百分率の常用対数，下限値-15.0）

5. まとめ　本研究では，間隙率マトリックスn_Kの導入等によって流量と間隙水圧の連続性を改良した，u-U 定式化を提案し，間隙率が互層状に分布する 1 次元飽和弾性土柱モデルの鉛直地動問題を対象に感度解析を試行した。解析結果について u-w 定式化との誤差を定量的に分析し，提案した u-U 定式化の適用性と有用性を検証した。

参考文献　1) Zienkiewicz and Shiomi : Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical solution, International journal for numerical and analytical methods in geomechanics，Vol.8，pp.71～96，1984.　2) Noda and Toyoda : Development and verification of a soil-water coupled finite deformation analysis based on u-w-p formulation with fluid convective nonlinearity，Soils and Foundations，Vol.59，Issue 4，pp.888～904，2019.　3) Simon et al. : An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids，International journal for numerical and analytical methods in geomechanics，Vol.8，pp.381～398，1984.　4) 宇野・船原：二相系定式化の違いが間隙率の異なる飽和互層地盤の地震時挙動に及ぼす影響，令和 2 年度土木学会全国大会第 75 回年次学術講演会，III-136，2020.