実現象を満足する浅水流方程式の解法

新潟大学大学院自然科学研究科　学生会員○大泉 尚紀
新潟大学災害・復興科学研究所　正会員　安田 浩保

1. はじめに

一般的に河川などの水理解析は，連続の式と運動の式として浅水流方程式を連立したものが用いられる．この時に浅水流方程式の摩擦損失の記述には，しばしばマニングの等流流速公式が用いられる．周知の通り，同公式においては河床材料ごとに規定される粗度係数が定数として与えられる．浅水流方程式により開水路の水理解析を行うということは，等流のみでなく，不等流と不定流に分類される流れも自動的に水理解析の対象とされる．著者らが知る限り，不等流と不定流の水理解析において，摩擦損失を等流流速公式で記述することが妥当であることを実証した先行研究はない．また，この実証の有無にかかわらず，不定流などの水理解析において，摩擦損失を等流流速公式で記述することは，等流における摩擦損失のみを考慮した解析であることに該当する．これまでに実施されてきた研究と実務のそれぞれにおける浅水流方程式を用いた水理解析の結果を踏まえると，このような水理解析が致命的に誤っているとは考えにくい．しかし，数理的な観点から見ると，浅水流方程式における流速についての時間微分と空間微分が十分に寄与する流れの摩擦損失を等流流速公式で記述した解析は，等流における摩擦損失のみを仮定した解析でしかなく，この解析が実河川や模型水路における実際の水理に適合している保証はない．

一般に浅水流方程式の水理解析は，粗度係数を一定とし，流速と水深の 2 つを未知数として解かれる．しかし，前述の通り，この解が実河川や模型水路における実際の水理を満足する保証はなく，実際の水理が同方程式を満たす解は，流速か水深のどちらか一方が既知の時にのみ得られる．また，非等流となる実際の水理を満足する流速と水深の組み合わせが決定している時には，もはや粗度係数が定数であるとは考えにくい．ここで，粗度係数の空間の関数への拡張を考えると，その水理的な意味は，等流流速公式に基づく摩擦損失の項が摩擦損失以外の損失についても考慮することに該当する．

実際の水理を満足する浅水流方程式の解を得るためには，水深と流速の測定値が一対に存在しているか，これらのどちらかがその一方と一対になる測定値が存在している必要がある．また，このような解析が実施できれば，空間の関数に拡張した粗度係数も算定できる．著者らの研究グループでは，水面と底面を同時かつ高分解能に計測できる測定装置である Stream Tomography(ST)[1] を開発し，水理解析と同程度の分解能で水深の測定をできるようにした．つまり，粗度係数を含めた 3 つの未知数のうち水深の測定値が得られ，原理的には，浅水流方程式における実際の水理を満足する流速と粗度係数を算定できるようになった．

これまでに数値解析と同程度の分解能で水深を測定する手法は未確立であった．このため，このような水深の測定値が存在する時に，浅水流方程式を用い，実際の水理を満足する流速と粗度係数を算定する方法は知られていない．そこで，本研究では，まず，浅水流方程式を用い，実際の水理を満足する解を得る方法を構築する．この解析は，実質的には，粗度係数を空間の関数とし，これを算定するものである．また，粗度係数は空間で一定とした計算が一般的だったため，粗度係数を空間の関数としたときに水深などの水理実験がどのような応答があるかも定性的にしか知られていない．そこで，粗度係数が摩擦損失以外の損失も含むために空間分布を持つときに不等流計算を行った場合，水深にどのような応答が出るかについても調べた．

2. 粗度係数を未知数とした浅水流方程式の解法の構築

本章では，粗度係数のみを未知数とした場合の浅水流方程式の解法を提案する．

(1) 解法の概要

一般的に河道の一次元水理解析においては，以下に示す運動の式と連続式を用いた水理モデルが多用される．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{gn^2u|u|}{h^{\frac{4}{3}}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial (uh)}{\partial x}=0 \tag{2}$$

ここで，u は縦断方向の流速，H は水位，h は水深，g は重力加速度，n は粗度係数である．

このモデルは，境界条件と，ある時刻の水理量を変数に代入することで，水位や流速の時間変化を記述するものである．しかし，境界条件が定常の場合，計算区間内の水位と流速もある定常の解をとる．この性質を利用し，モデル式の変数に定常時の解を代入して，時間変化させても水位が定常の解をとるような粗度係数を求めることで粗度係数を推定する．

まず，ある断面に対して，既知の水位，水深，境界条件の流量を既知の水深で除したもので近似した流速を代入する．次に浅水流方程式中の粗度係数に任意の値を代入し，1 ステップ後の流速を求める．その流速を今度は連続式中の流速に代入し，1 ステップ後の水位を求める．

算出された水位と既知の水位を比較し，両者の差がある値 ϵ 以上であった場合，粗度係数を更新して再び水位の推定を行う．粗度係数の更新には最急降下法を用いて

Key Words: 開水路の水理, 摩擦損失, 粗度係数
〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　TEL 025-262-7053

図–1 フローチャート

更新幅を決定させる方法を用いた．これを繰り返し，両者の水位差が ϵ 以下となったときに粗度係数が推定されたものとする．そして，この収束計算を全断面にわたって行うことにより，粗度係数の空間分布を得る．計算のフローチャートを**図–1** に示す．

方程式はスタッガード格子上で離散化した．また，この計算では 1 ステップかつ 1 つの断面内で収束計算を行うため，計算の打ち切り誤差が波及されにくいという性質がある．これを踏まえ，計算スキームは簡便な方法を用いても粗度係数の推定精度には影響しないと考えられる．したがって今回は，移流項を一次精度風上差分，その他の空間微分に後進差分を適用した．

(2) 粗度係数の推定結果

a) 数値計算条件

先に示した解法の妥当性の検証を行う．用いた数値実験の条件は，区間長 1km, 水路勾配 1/300, 川幅 1m の実河川スケールの実験水路である．流量は上流から下流に向かって $2.8\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ とした．粗度係数は 0.05 を振動中心とし振幅が 0.02 となる正弦関数を与え，さらに -0.003 から 0.003 の乱数を加えたものを設定した．粗度係数の推定においては，初期値に 0.07 を与えて収束計算を行った．計算点間隔は縦断方向に 5.0m として不等流計算を行い，算出された結果を水位と水深の真値として用いた．

b) 粗度係数の推定法の妥当性の検証結果

結果を**図–2** に示す．青線は推定値，黒点線は真値を表している．高周波成分のピークが合わない場所が散見されるものの，傾向としては良好な精度で推定され，今回の推定法は妥当であるといえる．この粗度係数の空間分布を得るにあたり，各計算点で 70 回から 600 回ほどの収束計算を要した．この収束計算は、数値計算で生成した真値と初期に与えた粗度係数の空間分布の乖離が大きいほど回数が増加する傾向となった．

3. 粗度係数の空間分布の水深に対する応答

振幅が等しく，波数が異なる粗度係数を**図–3** のように 3 ケース与え，不等流計算を行い，水深を比較した．波長はそれぞれ 600 m, 300 m, 100 m である．結果を**図–4** に示す．低周波の分布を粗度係数に与えた場合には，水深に大きく影響し，高周波の分布を粗度係数に与えた場

図–2 粗度係数の推定結果

図–3 与えた粗度係数

図–4 不等流計算結果

合には水深への応答が小さく，下流端水深に収束していることがわかる．これらの結果から，粗度係数が大きな周期で変化するような場合には，空間で変化する粗度係数の影響が水深に大きく現れる可能性があると言える．このことは，実河川においては種々の波長の河床波が自発的に形成され，そこでの損失が摩擦損失以外も寄与していることが十分に推測され，そこでのトータルの損失が正確に推定できるようになれば，洪水流と移動床の水理のどちらもを正確に推定できるようになることを示唆するものである．

4. おわりに

一般に浅水流方程式の水理解析は，粗度係数を一定とし，流速と水深の 2 つを未知数として解かれる．しかし，この解が実河川や模型水路における実際の水理を満足する保証はない．本研究では，実際の水理が同方程式を満たす解を得るため，水深が既知の時に，粗度係数と流速を算定する方法を構築した．同手法により，実際の水理を満足する浅水流方程式の解が得られることがわかった．また，粗度係数が大きな周期で空間に分布するような場合には，水深に大きく影響し，重大な水深の変化を生じさせる可能性を示唆した．

参考文献

1) 星野剛，安田浩保，倉橋将幸：交互砂州の形成機構の解明に向けた水面と底面の同時計測手法の開発，土木学会論文集 A2(応用力学)，74 巻 1 号，pp.63–pp.74，2018.