

## 2次元波状管路流れへの原型および改良型ブシネスク方程式の適用性に関する研究

京都大学大学院 学生員 ○山本 侑資  
 フェロー 細田 尚  
 京都大学大学院 正会員 音田慎一郎

## 1. はじめに

管路流れでの砂堆の発生・発達を予測する場合、数値解析の容易さを考慮すると水深積分型の運動量方程式を用いることが簡便と考えられる。そこで本研究では、運動量式として流速分布を一様と仮定した原型ブシネスク方程式、および流速分布の変形を考慮した改良型ブシネスク方程式を考え、それらの2次元波状管路流れへの適用性について考察したものである。

## 2. 原型ブシネスク方程式による解析

図-1に示した概念図と座標系の下で、一様流速を仮定した管路流れ用のブシネスク方程式原型<sup>1)</sup>を用いてZilker等<sup>2),3)</sup>の実験結果を再現計算し、せん断応力分布と圧力分布の実験結果との比較を行う。ただし、式(1)は管路の下半分に対して適用される。底面せん断応力の評価には平均流速と底面変動との位相差を考慮した経験式を適用する。以下に、無次元化されたブシネスク方程式原型を示す。

$$\begin{aligned} \frac{dD'}{dx'} - D^3 \frac{dP_D'}{dx'} + \frac{2}{3} \left( \frac{dD'}{dx'} \right)^3 \\ - \frac{5}{6} D \frac{dD'}{dx'} \frac{d^2 D'}{dx'^2} + \frac{1}{6} D^2 \frac{d^3 D'}{dx'^3} \\ - C_f \left( 1 - \Gamma \frac{dD'}{dx'} \right) - \alpha D \frac{d^2 D'}{dx'^2} + \alpha \left( \frac{dD'}{dx'} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $p_D$ ：中心軸の圧力、 $C_f$ ：摩擦係数、 $\alpha$ ：渦動粘性項の係数、 $D$ ：管路半幅、 $D_0$ ：一波長平均。ただし、下記の無次元量を用いて基礎式を無次元化している。

$$D' = \frac{D}{D_0}, x' = \frac{x}{D_0}, \left( \frac{p_D}{\rho} \right)' = P_D' = \frac{p_D}{\left( \frac{q}{D_0} \right)^2} \quad (2)$$

ここに、 $q$ ：半幅の単位幅流量、 $\rho$ ：流体の密度。また、せん断応力については式(3)に示した経験式を用いる。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = C_f U^2 \left( 1 - \Gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (3)$$

ここに、 $U$ ：平均流速、 $\tau_{bx}$ ：壁面上のせん断応力である。

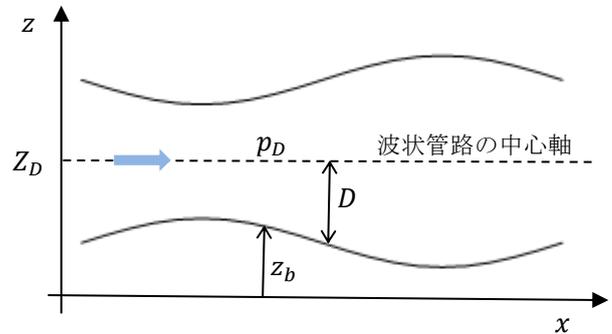


図-1 上下対称の波状管路の概念図

$\Gamma$  は定数である。Zilker 等の実験条件に合わせて式(1)の線形解を計算することで得られた圧力分布を図-2に、せん断応力分布を図-3に示した。せん断応力分布の計算結果は実験結果に概ね適合したが、圧力分布については振幅が過大評価されていることが分かった。

## 3. 改良型ブシネスク方程式の導出

次に、流速分布の変形を考慮した改良型のブシネスク方程式を導出することで原型でのせん断応力の評価式の根拠について考察するとともに圧力分布の再現性の改善を試みる。

流速分布形を相対座標のべき乗展開式で表現する。

$$u = u_0 + u_1 \zeta + u_2 \zeta^2 + u_3 \zeta^3 + u_4 \zeta^4 + u_5 \zeta^5 \quad (4)$$

ここに、 $u$ は $x$ 方向の流速成分、また $\zeta = (z - z_b)/D$ 。

紙面の制限のため詳細は省略するが、式(4)を連続式に代入して $z$ 方向の流速成分 $w$ の表示を導いた後、それと式(4)を運動方程式(5)および(6)に代入することで $u_0 \sim u_5$ および圧力 $p$ と $D$ の関係式を導出した。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + D_{my} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6)$$

ここに、 $D_{my}$ は渦動粘性係数で $q$ に比例すると仮定した。参考のため、 $u_2$ の関係式を記述すると次式となる。

$$u_0 E_0 + \frac{1}{D} A_0 u_1 = - \frac{d}{dx} \left( \frac{p_D}{\rho} \right) - g \frac{dD}{dx}$$

キーワード 波状管路流れ、ブシネスク方程式、壁面せん断応力

連絡先 〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂 C1-3 TEL075-383-3269

$$-\frac{d}{dx}(DP_0) + \frac{2D_{my}}{D^2}u_2 - g\frac{dz_b}{dx} + P_1\frac{dz_b}{dx} = 0 \quad (7)$$

ここに、 $A_0, E_0$ は $u_0$ と $D$ の関数。

このようにして導かれた  $u_2, u_3, u_4$  の関係式と Engelund モデルの関係式 $u_1 = u_0/(\beta r_*)$ 、連続式および中心軸での流速の対称条件を式(8)で与えられる水深積分型の運動量方程式に代入後、線形化することで中心軸の圧力 $p_D$ と $D$ に関する線形化方程式を導いた。

$$\frac{d}{dx}\left(D\int_0^1 u^2 d\xi\right) = -\frac{d}{dx}\left(D\int_0^1 \frac{p}{\rho} d\xi\right) - \frac{p_b}{\rho}\frac{dz_b}{dx} \quad (8)$$

$$-\frac{\tau_{bx}}{\rho} - aq^2\left\{-\frac{1}{D^2}\left(\frac{dD}{dx}\right)^2 + \frac{1}{D}\frac{d^2D}{dx^2}\right\}$$

ここに  $z_b$ : 路床変動,  $q$ : 単位幅流量,  $p_b$ : 波面上の圧力である. この際, 壁面せん断応力は $r_*u_0^2$ として評価した. ただし,  $r_*$ は10~15程度の定数.

長い計算の後に得られた中心軸の圧力 $p_D$ と $D$ に関する線形化方程式を無次元形で示せば式(9)となる.

$$E_2\frac{d^2P'_D}{dx'^2} + E_1\frac{dP'_D}{dx'} + E_0 + F_D\delta D' + F_1\frac{d\delta D'}{dx'} \quad (9)$$

$$+ F_2\frac{d^2\delta D'}{dx'^2} + F_3\frac{d^3\delta D'}{dx'^3} + F_4\frac{d^3\delta D'}{dx'^4} = 0$$

ここに、各係数は定数 $r_*, \beta$ およびパラメータ $D_{my}/q$ を用いて計算される定数.

ただし、導出の過程でまず一回目の値として

$$u_0 = U, \quad u_1 = \frac{1}{\beta r_*}U, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0 \quad (10)$$

を基礎式系に代入して次ステップの値を計算する逐次近似法を適用した. ここではこの手続きを一回施した結果を示す.

#### 4. 改良型の計算結果の考察

$D_{my}/q=0.1, \beta=0.1$ として $r_*$ を10,15,20と変化させて計算した圧力分布を図-2下に示した. 計算結果は $r_*$ の値によってあまり変化せず, 原型と同様に実験結果と十分には適合していない. 図-3下には $D_{my}/q$ の値を変化させて計算した壁面せん断応力の分布を示した.  $D_{my}/q=0.1$ の計算結果が実験結果と適合している. しかし,  $D_{my}/q$ の値は本来 $\beta$ の1/10であるべきであるが $D_{my}/q=0.01$ とすると計算結果は実験結果と全く適合しなくなる. この理由として, 逐次近似の一ステップ目で打ち切った結果を示していることが考えられるので, 逐次近似の精度を上げた検討を行う必要がある.

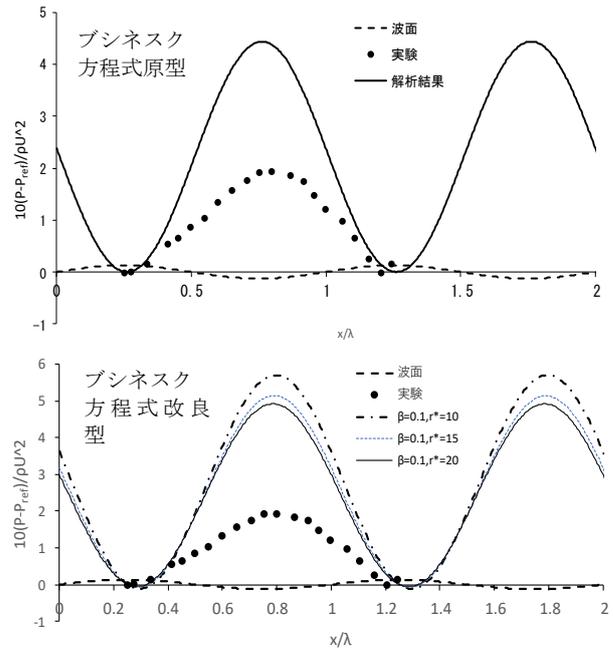


図-2 圧力分布(Re=15060, 2a/λ=0.05)  
(上: 原型 下: 改良型  $q/D_{my}=10$ )

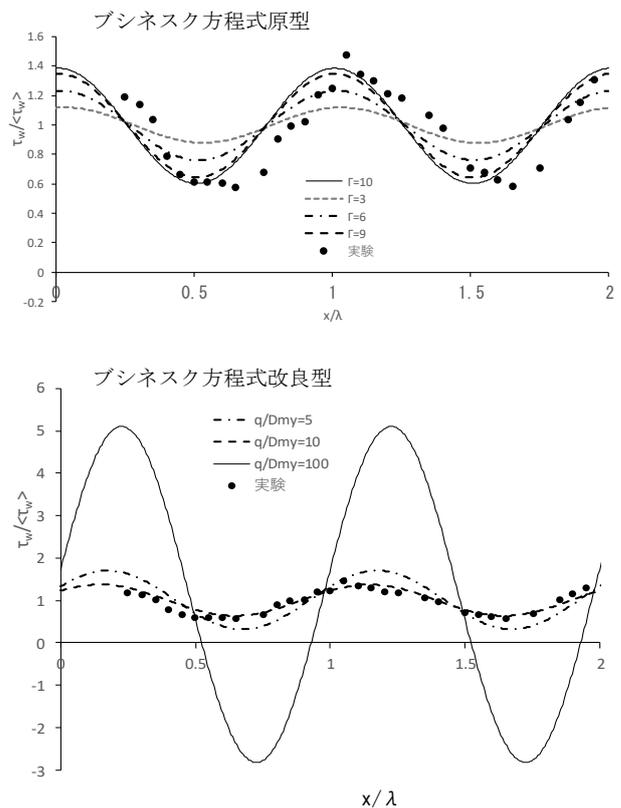


図-3 せん断応力分布(Re=9680, 2a/λ=0.0125)  
(上: 原型, 下: 改良型)

5. おわりに 今後, 改良型の定式化や解析法についてより詳細な検討を行いたい.

#### 参考文献

- 1) Hosoda, T. et al., Advances in River Sedimentation Research, pp.205-209, 2013.
- 2) Zilker, D.P. et al., J. Fluid Mech., Vol.82, Part1, pp.29-51, 1977.
- 3) Zilker, D.P. et al., J. Fluid Mech., Vol.90, Part2, pp.257-271, 1979.