

2次元EFITを用いたマイクロポーラー弾性体中の 空洞による弾性波動散乱解析

群馬大学 大学院理工学府 学生会員 鈴木悠介
群馬大学 大学院理工学府 正会員 齋藤隆泰

1. はじめに

材料中の微視構造や局所回転まで考慮した連続体理論は、一般連続体理論と呼ばれている。その一般連続体理論の一つである、マイクロポーラー弾性論は、古くから研究されてきた。一般的に、静的な問題においては、解析領域が微視構造に比べて十分大きい場合、偶応力は無視できる。しかしながら、動的な問題において、弾性波の波長が微視構造と同程度の場合、偶応力を無視できず、マイクロポーラー弾性体の理論を取り入れる必要があると言われている。このような中、著者らはマイクロポーラー弾性体中の面内波動解析を動弾性有限積分法(EFIT)を用いて行ってきた¹⁾。本研究では、その成果を空洞による散乱解析へと拡張する。以下では、2次元マイクロポーラー弾性論の基礎式、EFIT解析の定式化について簡単に述べた後、数値解析結果を示すことで、本手法の妥当性を示す。最後に今後の課題等について述べる。

2. 2次元マイクロポーラー弾性波動問題

本節では、特に断りのない限り、ローマ文字の右下添字は1, 2, 3, の値を取り、総和規約に従うとする。線形マイクロポーラー弾性論における、運動方程式、変位-ひずみ関係式、構成関係式は、弾性体が等方であるとき、次のように表される²⁾。

1) 応力に関する基礎式

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = u_{j,i} - e_{ijk} \phi_k \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \kappa) \epsilon_{ij} + \mu e_{jki} \quad (3)$$

2) 偶応力に関する基礎式

$$m_{ji,j} + e_{ijk} \sigma_{jk} + l_i = \rho j \ddot{\phi}_i \quad (4)$$

$$\psi_{ij} = \phi_{j,i} \quad (5)$$

$$m_{ij} = \alpha \psi_{kk} \delta_{ij} + \beta \psi_{ji} + \gamma \psi_{ij} \quad (6)$$

ここで、 u_i , ϕ_i はそれぞれ変位および微視回転、 b_i , l_i は物体力および物体偶力、 ϵ_{ij} , ψ_{ij} はマイクロポーラーひずみおよび微視回転勾配、 σ_{ij} , m_{ij} は応力および偶応力であり、 ρ は密度、 j はマイクロ慣性モーメント、 $\lambda, \mu, \kappa, \alpha, \beta, \gamma$ はマイクロポーラー弾性定数である。また、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ、 e_{ijk} は交代記号、 $(\dot{\quad})$ は時間微分、 $(\quad)_{,i}$ は空間微分 $\partial/\partial x_i$

を表す。本研究では、式(1)-(6)を適当な初期値、境界値と共に解析するために、次節で述べるEFIT³⁾を用いる。

3. FEITの定式化

本研究では、数値解析手法として有限領域を比較的容易に解析できる差分法をベースとした、EFITを選定する。なお、マイクロポーラー弾性体を対象とした面内波動問題では縦波、横波に加え横回転波の3種類の波動が存在することに注意されたい。2次元マイクロポーラー弾性波動問題について、 $x_1 - x_3$ 面内を考えると、式(1)-(6)、より応力および偶応力の運動方程式と構成関係式は以下ようになる。

1) 運動方程式

$$\rho \ddot{u}_\alpha = \frac{\partial \sigma_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} + \rho b_\alpha \quad (\text{応力}) \quad (7)$$

$$\rho j \ddot{\phi}_2 = \frac{\partial m_{\alpha 2}}{\partial x_\alpha} + e_{2\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + l_2 \quad (\text{偶応力}) \quad (8)$$

2) 構成関係式

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\alpha\beta} = & \lambda \frac{\partial \dot{u}_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (\mu + \kappa) \frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial x_\alpha} + \mu \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x_\beta} \\ & - (\mu + \kappa) e_{2\alpha\beta} \dot{\phi}_2 - \mu e_{2\beta\alpha} \dot{\phi}_2 \quad (\text{応力}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{m}_{\alpha 2} = 4GN^2 l^2 \frac{\partial \dot{\phi}_2}{\partial x_\alpha} \quad (\text{偶応力}) \quad (10)$$

ここで、 α, β は1または3をとり、 G はせん断弾性係数、 l は材料の微小構造の代表長である。なお N は連成数と呼ばれ、マイクロポーラー特性の強度を表す無次元定数である。これら3つの係数はそれぞれ次のように表される。

$$G = \frac{2\mu + \kappa}{2}, \quad l^2 = \frac{\gamma(\mu + \kappa)}{\kappa(2\mu + \kappa)}, \quad N^2 = \frac{\kappa}{2(\mu + \kappa)} \quad (11)$$

特に、連成数 N は $0 \leq N \leq 1$ の範囲にあり、 N が0に近づくと古典弾性論に、1に近づくと偶応力理論に漸近する。EFITでは、同じ差分法であるFDTD法とは異なり、差分方程式をスタッガード格子の微小四角形領域で積分した後に離散化を行う必要がある。簡単のため物体力 b_α 、物体偶力 l_2 をゼロとした後、式(7)-(10)を微小領域に関して積分し、ガウスの発散定理を用いて時間と空間に対する離散化を行うと、粒子速度 \dot{u}_α 、微視回転速度 $\dot{\phi}_2$ と応力 $\sigma_{\alpha\beta}$ 、偶応力 $m_{\alpha 2}$ に関する差分方程式がそれぞれ得られる。EFITの特徴は、これら粒子速度 \dot{u}_α 、微視回転速度 $\dot{\phi}_2$ と応力 $\sigma_{\alpha\beta}$ 、偶応力 $m_{\alpha 2}$ の積分セルが互いにずれた配置となっており、弾性定数や密度は垂直応力の積分セル内で定義される点にある。その

Key Words: マイクロポーラー弾性論, EFIT, 2次元マイクロポーラー弾性波動解析

〒376-8515 群馬県桐生市天神町1-5-1 群馬大学 大学院理工学府 TEL. 0277-30-1610 FAX. 0277-30-1610

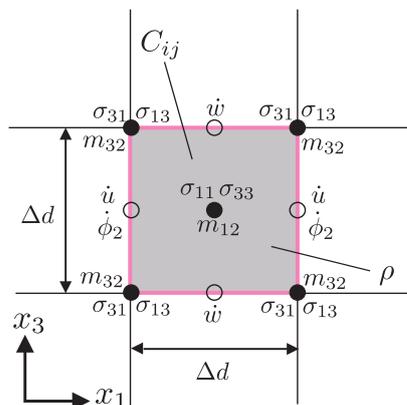


図1 垂直応力を中心とする積分セル.

ためマイクロポーラー弾性波動方程式を領域積分すると、節点配置が図1のように自然と決定され、弾性定数や密度を設定するセルが明確に定義される。よって、自由反射境界や異種材料境界といった境界条件を通常のFDTD法等と比べて明確に扱うことができる。ただし、図1中の \dot{u}, \dot{w} は工学表記により、それぞれ x_1, x_3 方向の粒子速度を表すことに注意されたい。

4. 数値解析結果

以下、数値解析結果を示す。解析モデルは図2とし、幅6.0m、高さ3.0mのマイクロポーラー弾性体中に存在する直径0.1mの空洞による波動散乱解析を行う。入射波は正弦波1波とし、試験体上部中央の原点から $|x_1| \leq 4.0 \times 10^{-3}$ mの範囲に粒子速度 $\dot{w}^{\text{in}} = w_0 \sin 2\pi t/T$ ($0 \leq t \leq T$)を与えた(その他は表面力フリー)。ここで w_0 は振幅、 T は周期である。但し、実際の解析では周期 $T = 0.05$ [s]としている。また解析で用いたパラメータは、総時間ステップ数 $n = 50000$ 、空間離散間隔 $\Delta d = 2.0 \times 10^{-3}$ [m]、時間離散間隔 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ [s]とした。材料定数は、それぞれ密度 $\rho = 4.5$ [kg/m³]、マイクロ慣性モーメント $j = 0.175$ [m²]とした。さらに、マイクロポーラー弾性定数は、それぞれ $\lambda = 1.5$ [N/m²]、 $\mu = 1.0$ [N/m²]、 $\kappa = 1.0$ [N/m²]、 $\gamma = 0.375$ [N]とし、文献²⁾を参考に設定した。

数値解析結果を図3および図4に示す。図3は弾性波動場の変位速度の絶対値 $\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{w}^2}/w_0$ を、図4は微視回転速度の絶対値 $|\dot{\phi}_2|/w_0$ を示している。図3および図4より試験体上部中央より弾性波が発生し、時間と共に縦波、横波に加え横回転波が、いずれも同心円状に伝搬していく様子が見て取れる。また図3(c)、図3(d)では、空洞により等方に伝搬する散乱波の発生、および境界からの反射波の伝搬も確認できる。一方で、図4(c)では、横回転波が空洞に達する前に、別の横回転波の波動が空洞から現れていることが確認できる。縦波が空洞を通過すると同時に横回転波が発生していることから、モード変換によるものであり、縦波の波動エネルギーの一部が横回転波に変換されたものだと考えられる。図4(d)においても、横回転波が底面および側面に

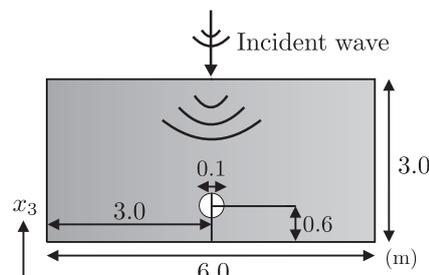


図2 解析モデル.

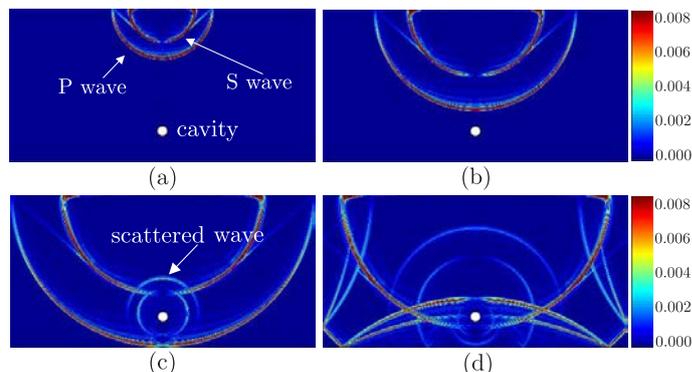


図3 弾性波動場 $\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{w}^2}/w_0$ の可視化結果 (a)10000step, (b)20000step, (c)30000step, (d)40000step.

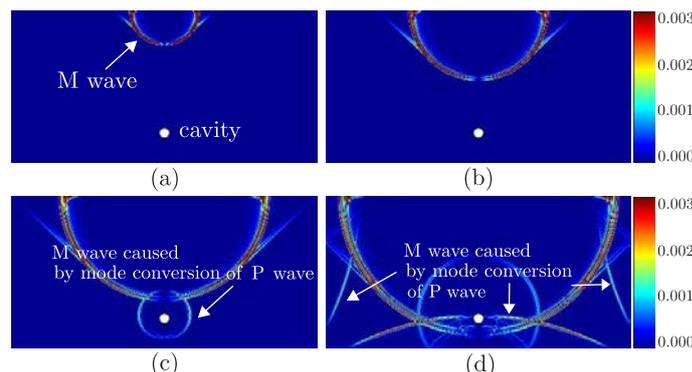


図4 微視回転波動場の $|\dot{\phi}_2|/w_0$ の可視化結果 (a)10000step, (b)20000step, (c)30000step, (d)40000step.

達する前に別の横回転波の発生が確認できるが、これも同様の現象であると考えられる。以上より、定性的ではあるが、マイクロポーラー弾性体中の空洞による波動散乱現象を再現できた。

5. まとめと今後の課題

2次元EFITを用いたマイクロポーラー弾性体中の空洞に対する弾性波動散乱解析を行い、3種類の波動の可視化を行った。今後は、時間領域境界要素法を用いた場合の定式化も試み、EFITの解析結果と比較をすることで、両者の解析結果の妥当性を検討する予定である。

参考文献

- 1) 鈴木悠介・斎藤隆泰・廣瀬壮一: 2次元動弾性有限積分法を用いたマイクロポーラー弾性体中の時間領域波動解析, 土木学会第23回応用力学シンポジウム講演概要集, S02C-03, (2020)
- 2) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000)
- 3) 中畑和之・廣瀬壮一: 非均質異方性材料中の弾性波伝搬解析のためのイメージベースEFITの開発と非破壊検査への応用, 応用力学論文集, Vol.12, pp.163-170, (2009)