

Box-Cox 変換を介した日最大風速の確率密度関数の推定

法政大学 正会員 北川徹哉

1. はじめに 非正規過程のデータを正規過程に近づける手法の一つに Box-Cox 変換¹⁾がある. これまで著者は気象庁の気象台・測候所において観測²⁾された日最大風速に Box-Cox 変換を適用し, その特性を分析してきた³⁾. 本論はその継続研究であり, Box-Cox 変換による正規化を利用して日最大風速の確率密度関数を定式化し, その確率統計的性質を調べる.

2. Box-Cox 変換を介した日最大風速の確率密度関数 y 年における元旦からの日数を t とし, ある地点の日最大風速を $U_y(t)$ (> 0) とすると, その Box-Cox 変換 $\hat{U}_y(t)$ は式(1)である. パラメータ λ の最適値 λ_y は最尤法により算定され, $\lambda = \lambda_y$ のときの式(1)が求めるべき $\hat{U}_y(t)$ である. 次に, 確率変数としての日最大風速を U , その Box-Cox 変換を $\hat{U}$ とし, ある地点における y 年の U の確率密度関数を $P_y(U)$, $\hat{U}$ の確率密度関数を $p_y(\hat{U})$ とする. $P_y(U)dU = p_y(\hat{U})d\hat{U}$ の関係, 日最大風速の Box-Cox 変換が正規過程なら $p_y(\hat{U})$ は正規分布であること, そして式(1)を用いると $P_y(U)$ は式(2)のように表すことができる. ここで, $\hat{\mu}_y$ と $\hat{\sigma}_y$ は y における $\hat{U}$ のそれぞれ平均値, 標準偏差である. また, 式(2)の第2式 ($\lambda_y = 0$ の場合) の $P_y(U)$ はいわゆる対数正規分布である.

$$\hat{U}_y(t) = \begin{cases} \frac{U_y(t)^\lambda - 1}{\lambda} & (\lambda \neq 0) \\ \ln U_y(t) & (\lambda = 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$P_y(U) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_y} \exp \left\{ - \left(\frac{U^{\lambda_y} - 1}{\lambda_y} - \hat{\mu}_y \right)^2 / 2\hat{\sigma}_y^2 \right\} U^{\lambda_y - 1} & (\lambda_y \neq 0) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_y} \exp \left\{ - (\ln U - \hat{\mu}_y)^2 / 2\hat{\sigma}_y^2 \right\} U^{-1} & (\lambda_y = 0) \end{cases} \quad (2)$$

3. 日最大風速の確率密度関数の推定結果 111 地点の気象台・測候所において観測された, $y = 1961 \sim 2017$ 年の 57 箇年の $U_y(t)$ について, λ_y および $\hat{U}_y(t)$ を求めた. 例として, 東京管区気象台における 1975 年の日最大風速 $U_{1975}(t)$ とその Box-Cox 変換 $\hat{U}_{1975}(t)$ を図 1(a), (b) に示す. 図 1(a) の $U_{1975}(t)$ は間欠的に大きな変動を含む非対称な波形となっている一方, 図 1(b) の $\hat{U}_{1975}(t)$ では対称な変動となっている. また, 図 1(b) の確率分布を図 2(b) に示す. 図 1(b) の対称な波形が反映されており, $\hat{U}_{1975}(t)$ はおおむね正規過程である. これに対して, 図 1(a) の確率分布が図 2(a) であり, 非対称な分布となっている. さらに, 図 1(b) の $\hat{U}_{1975}(t)$ より算術的に求めた平均値と標準偏差をそれぞれ $\hat{\mu}_{1975}$, $\hat{\sigma}_{1975}$ と

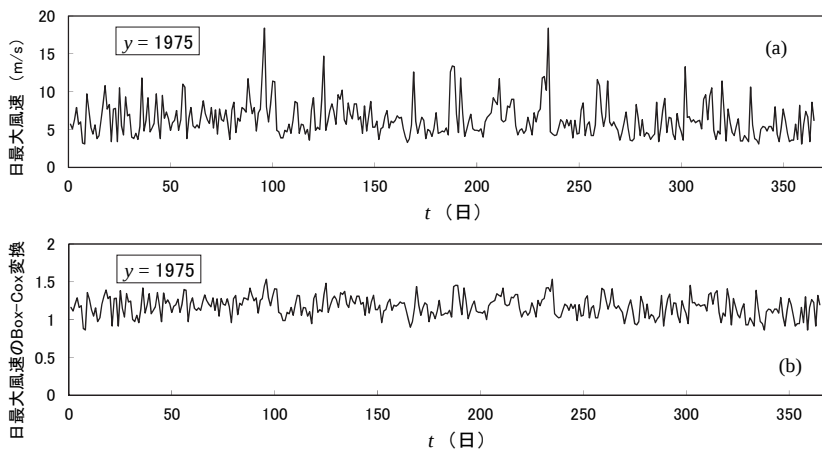
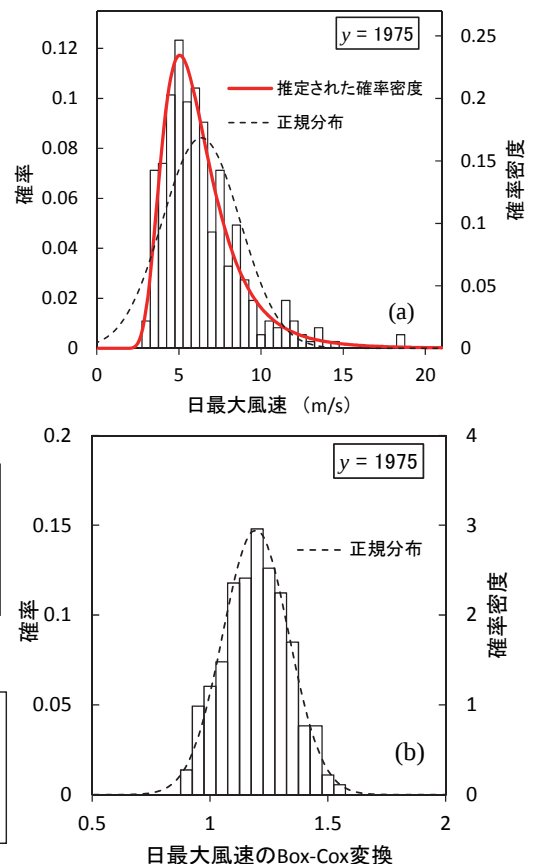


図 1 日最大風速とその Box-Cox 変換の例

(a) 東京管区気象台における 1975 年の日最大風速 (b) (a) の Box-Cox 変換

図 2 確率分布と推定された確率密度の例
(a) 図 1(a) の確率分布と式(2)により推定された確率密度関数 (b) 図 1(b) の確率分布

確率密度関数, 正規過程・非正規過程, 気象リスク, 日最大風速, Box-Cox 変換

〒102-8160 東京都千代田区富士見 2-17-1 電話: 03-3264-4921 FAX: 03-3264-9663

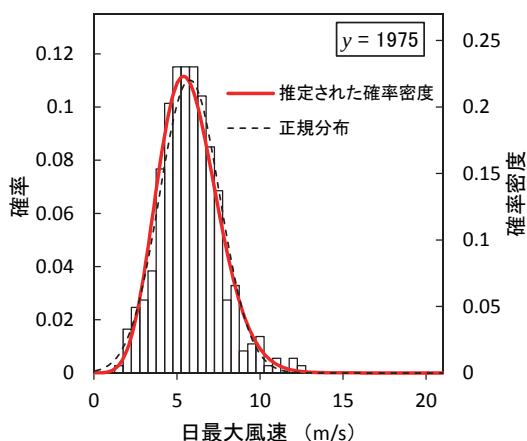


図3 長野地方気象台における 1975 年の日最大風速の確率分布と推定された確率密度関数

し、これらと Box-Cox 変換パラメータ λ_{1975} ($= -0.5$) を式(2)の第 1 式に代入して得られた $P_{1975}(U)$ が図 2(a)の実線である。 $P_{1975}(U)$ は $U_{1975}(t)$ の確率分布におおむね整合している。 もう一つの例として、同年に長野地方気象台で観測された $U_{1975}(t)$ の確率分布、ならびに式(2)により推定された $P_{1975}(U)$ を図 3 に示す。 推定された確率密度関数 $P_{1975}(U)$ は $U_{1975}(t)$ の確率分布と整合している。 ただし、東京管区気象台の例 (図 2(a)) と異なり、長野地方気象台の $U_{1975}(t)$ の確率分布は正規分布に近く、 $P_{1975}(U)$ も正規分布に似ている。

本論が検討対象としている各地点・各年における日最大風速について、上記の例と同様に確率密度関数 $P_y(U)$ を推定した。 そして、 $P_y(U)$ の 1~4 次のモーメントより、各地点・各年のそれぞれ平均値、標準偏差、歪度、尖度を推定した。 それらを各地・各年の $U_y(t)$ から算術的に求めた平均値、標準偏差、歪度、尖度を横軸としてプロットしたものがそれぞれ図 4(a)~(d)である。 なお、図中の破線は正の完全相関を表し、また、白色のプロットは地点ごとに年に関する平均をとったものである。 図 4(a)を見ると、推定された平均値は $U_y(t)$ から求めた平均値と一致している。 図 4(b)の標準偏差についても両者はほぼ一致しているが、年によってはやや乖離が見られる。 図 4(c)の歪度そして図 4(d)の尖度とモーメントの次数が上がるにつれて両者の乖離が拡大している。 ただし、値がゼロ付近では両者の一致がみられ、これらは上記の長野地方気象台の例 (図 3) のようにそもそも $U_y(t)$ がほぼ正規過程であり、推定された $P_y(U)$ も正規分布に近いケースである。

参考文献 1) Box, G. E. P. and Cox, D. R. : An analysis of transformations, *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, Vol.26, pp. 211-252, 1964. 2) 気象庁ホームページ : <http://www.jma.go.jp/jma/index.html>, 2020. 3) 北川徹哉 : 日最大風速の Box-Cox 変換パラメータ値の地形の特徴に基づく整理, 土木学会論文集 A1 (構造・地震工学), Vol. 76, No. 3, pp. 481-495, 2020.

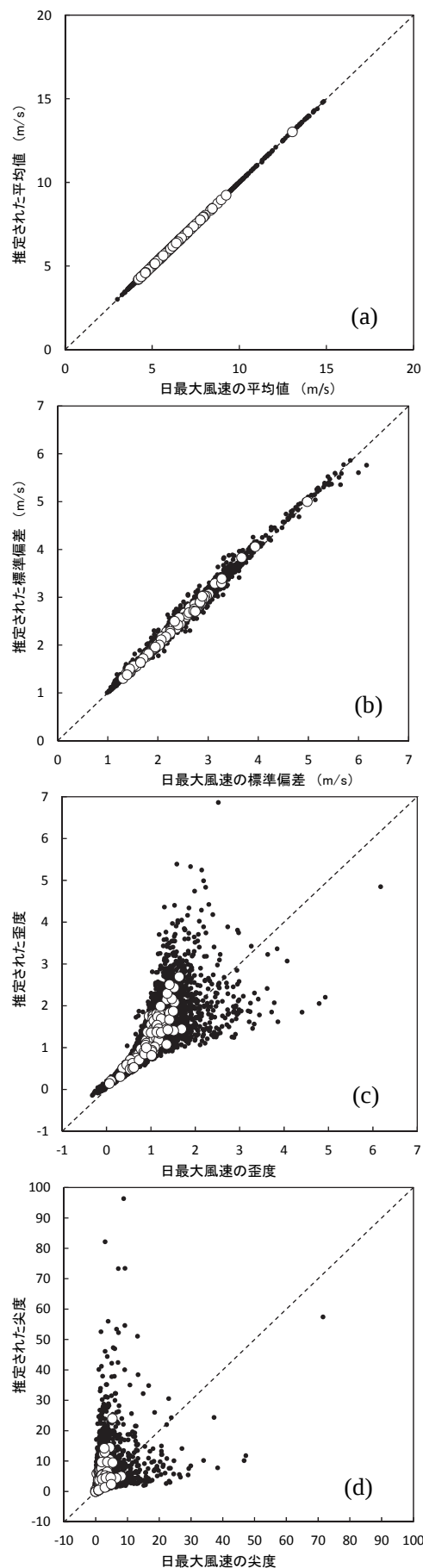


図4 推定された確率密度関数のモーメントから算出した統計値 (●:各地点・各年の値, ○:各地点の年に関する平均値, 破線:正の完全相関) (a)平均値 (b)標準偏差 (c)歪度 (d)尖度