タッチダウンした竜巻状渦内の３次元流れ場を求めるための解析モデルの提案

東京大学　学生会員　○大鳥　弘雅
東京大学　正会員　石原　孟

1. はじめに

タッチダウンした竜巻状渦は複雑な３次元流れ場を示し、特に地表面中心付近の風速場は鉄道・橋梁などの設計に重要である。竜巻状渦の３次元流れ場の構造を明らかにし、コーナー域における風速を正確に予測する解析モデルが求められている。

石原ら[2]により、コーナー域における円周風速の増速要因は運動量保存式における移流項によることが示されたが、従来の解析モデルである Burgers-Rott モデル[1,5]では移流項を０としており、コーナー域の風速場を精度良く評価できない。移流項を予測するためには半径・鉛直風速を予測する解析モデルが必要である。

本研究では、タッチダウンした竜巻状渦の時間平均・軸対称平均風速場を予測するための解析モデルを提案する。まず、数値竜巻実験装置による風速の予測値の分析により、質量と運動量保存式の支配項を明らかにする。次に、支配項に基づき、旋衡風域および境界層外側域の風速場モデルを提案する。最後に、提案モデルを境界条件として、コーナー域における風速場を予測する解析モデルを導出し、移流項による円周風速増加のメカニズムを解明する。

2. 竜巻状渦の風速場における支配項の分析

Liu and Ishihara[4]による数値竜巻実験装置を用い、ガイドベーン角θを76.0°から84.4°まで変化させた５ケースについて、タッチダウンした竜巻状渦をシミュレーションした。本研究では、θ=84.4°のケースのみ記す。図１には竜巻状渦風速場の概念図を示し、図２には旋衡風域および境界層外側域における半径方向の運動量保存式の各項を示した。旋衡風域では遠心力が半径方向圧力勾配とバランスしていること、並びに境界層コーナー域では半径と鉛直風速により移流項が出現することが分かる。境界層外側では鉛直風速がほぼ０となり、鉛直風速に由来する移流項も消えている。各領域の質量と運動量保存式の支配項を表１にまとめた。ここで、風速と半径座標を旋衡風域の円周風速のピーク値と対応するピーク半径により無次元し、鉛直座標を実験装置の代表長さ(150mm)により無次元化した。

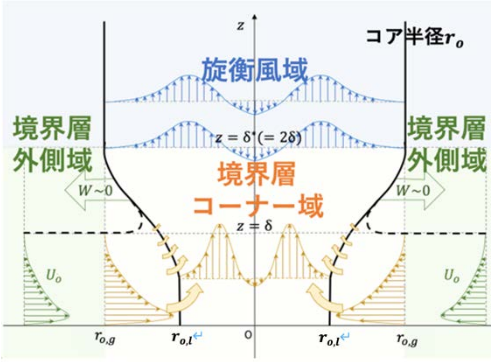
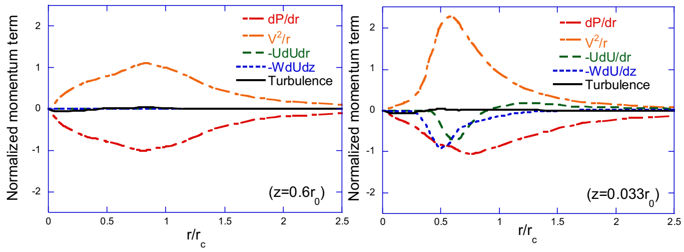


図１　竜巻状渦風速場の概念図



(a) 旋衡風域　　　　(b) 境界層域

図２　半径方向の運動量保存式各項のバランス

表１　各領域における支配方程式の支配項

	質量保存式	半径方向運動量保存式
旋衡風域	$U=0, W=W(r)$　(1)	$-\frac{V^2}{r}=-\frac{\partial P}{\partial r}$　(2)
境界層外側域	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rU)}{\partial r}=0, W=0$　(3)	$U\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{V^2}{r}=-\frac{\partial P}{\partial r}$　(4)
境界層コーナー域	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rU)}{\partial r}+\frac{\partial W}{\partial z}=0$　(5)	$U\frac{\partial U}{\partial r}+W\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{V^2}{r}=-\frac{\partial P}{\partial r}$　(6)

3. 解析モデルの提案

3.1 コーナー域の上側・外側境界の風速場

本節では、旋衡風域および境界層外側域の風速場モデルを提案する。旋衡風域の半径風速$U_g(=0)$・鉛直風速W_gを式(1)より、円周風速V_gを式(2)より導出する。Ishihara ら[2]の論文に基づき、圧力Pを全領域で鉛直方向に一定と仮定し、式(2)よりV_gは半径rの関数としてモデル化した。Burgers-Rott 渦の円周風速を修正し、外側域$(r>2)$の循環Γ_gを既知の値とし、V_gを式(7)により評価した。

W_gは、Gaussian 状分布を示すドーナツ状の上昇流と中心部の下降流（図１）からなると仮定し、式(8)により評価した。K は Gaussian 分布の分散であり、数値流体解析の結果より 0.15 として同定した。r_oは Lewellen and

Lewellen[3]により提案された外側コア半径であり、鉛直風速成分が存在する外側境界を表す。本研究では、上昇流がピーク値の 1%以下となるようにピーク半径の2倍と定義した。すなわち、旋衡風域においては$r_{o,g} = 2$となる。αは流量である。Xは鉛直風速の半径分布におけるピーク値（0〜1 の値を取る）であり、旋衡風域では$X = 1$と定義した。

$$V_g = \begin{cases} V_g = \frac{1}{r}\frac{1-\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right)}{\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right)}, \sigma^2 = 0.8 \quad [r < 1] \\ \frac{\left(\left(\frac{2}{\sigma^2}+1\right)\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)-\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right)\right)}{r\cdot\left(\frac{2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right)}, \sigma^2 = \frac{1}{2\left(\frac{\Gamma_g}{2\pi}-1\right)} \quad [r > 1] \end{cases} \tag{7}$$

$$W_g = \alpha X(z)\int_0^{2\pi}\left\{\exp\left(-\frac{\left(r-\frac{r_{o,g}}{2}\cos(\theta)\right)^2+\left(\frac{r_{o,g}}{2}\sin(\theta)\right)^2}{K\left(\frac{r_{o,g}}{2}\right)^2}\right) - \exp\left(-\frac{r^2+\left(\frac{r_{o,g}}{2}\right)^2}{K\left(\frac{r_{o,g}}{2}\right)^2}\right)\right\}d\theta \tag{8}$$

境界層外側域においては、式(3)により鉛直風速W_oが0、半径風速U_oが半径に反比例となる。そこで、U_oの鉛直分布を半径分布と分離し、流入風高さδ および粘性底層高さ z^*を用いて、式(9)のように近似した。U_oは$z=\delta$において 0 に収束し、$z = z^*$において極小となる。全てのケースの半径風速の入力値と地表面の境界条件が同じであるため、数値流体解析の結果より$\delta = 0.2$、$z^* = 0.02$と同定した。βは流量、c_1は$z = z^*$における極小条件を満たす定数である。

$$U_o = -\frac{\beta}{r}\frac{(\delta-z)^2}{\delta^3}\left(1-\exp\left(-c_1\left(\frac{z}{\delta}\right)^2\right)\right)[z < \delta], 0\,[z > \delta] \tag{9}$$

3.2 コーナー域の風速場

コーナー域の鉛直風速W_Iの半径方向分布について、Lewellen and Lewellen[3]に倣い、$r_o(z)$について相似と仮定した。式(8)で表されるW_gとの境界条件を考慮し、W_Iを式(14)と導出した。ここで、$r_o(z)$は式(10)により近似し、地表面で$r_{o,I}$、境界層高さ$z = \delta^*$で$r_{o,g}$へと収束する増加関数とした。c_2 は旋衡風域との境界条件$dr_o/dz(z = \delta^*) = 0$から決まる定数であり、$\delta^* = 2\delta$、$r_{o,I} = 1.2$と定義する。

$$r_o(z) = 2\left(\frac{r_{oI}}{2}+\left(1-\frac{r_{oI}}{2}\right)\frac{z\sin\left(\frac{c_2 z}{\delta^*}\right)}{\delta^*\sin(c_2)}\right) \quad [z < \delta^*] \tag{10}$$

式(5)より、半径風速U_IをXの関数として式(15)のように導出する。積分形の質量保存式(11)を代入すると、Xの微分方程式(12)が成立し、Xは式(13)として導かれる。

$$\int_0^r 2\pi r W_I dr = \int_0^z 2\pi r\, U_o dz \tag{11}$$

$$\left(\frac{2}{r_o}\frac{dr_o}{dz}+\frac{1}{X[z]}\frac{dX}{dz}\right) = \frac{U_o}{\int_0^z U_o dz} \tag{12}$$

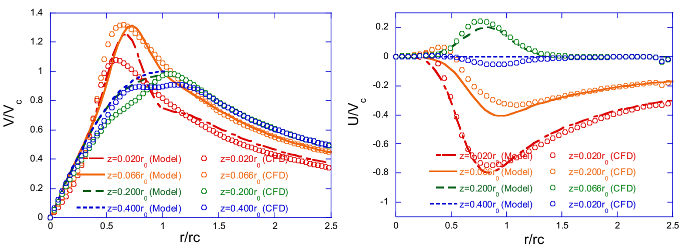
$$X(z) = \frac{1}{\left(\frac{r_o(z)}{2}\right)^2}\frac{\int_0^z U_o dz}{\int_0^\delta U_o dz} \tag{13}$$

U_IとW_Iは、流量βと循環Γ_gの２つのパラメタをもつ関数として導かれる。U_IとW_Iを運動量保存式(6)の移流項に代入し、V_Iを式(16)として導出した。図３には提案モデル(14)-(16)と数値流体解析により求めた風速の予測値の比較を示す。提案モデルはコーナー域での増速を精度よく予測できることを示した。

$$W_I = \alpha X\int_0^{2\pi}\left\{\exp\left(-\frac{\left(r-\frac{r_o}{2}\cos(\theta)\right)^2+\left(\frac{r_o}{2}\sin(\theta)\right)^2}{K\left(\frac{r_o}{2}\right)^2}\right) - \exp\left(-\frac{r^2+\left(\frac{r_o}{2}\right)^2}{K\left(\frac{r_o}{2}\right)^2}\right)\right\}d\theta \tag{14}$$

$$U_I = \frac{1}{r_o}\frac{dr_o}{dz}rW_I - \left(\frac{2}{r_o}\frac{dr_o}{dz}+\frac{1}{X}\frac{dX}{dz}\right)\frac{1}{2\pi r}\int_0^r 2\pi r W_I dr \tag{15}$$

$$V_I = \sqrt{{V_g}^2 + r\left(U_I\frac{\partial U_I}{\partial r}+W_I\frac{\partial U_I}{\partial z}\right)} \tag{16}$$



(a) 円周風速　　(b) 半径風速

図３　提案モデルと CFD による風速場の予測結果

4. まとめ

旋衡風域、境界層外側域、コーナー域の３次元風速場を予測する解析モデルを提案した。半径と鉛直方向の風速を質量保存式から、円周風速を半径方向運動量保存式から導出した。提案モデルにより予測した３次元風速場は LES 乱流モデルを用いた数値竜巻実験の予測結果とよく一致した。

参考文献

(1) Burgers, J.M., 1948. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. Adv. Appl. Mech. 1, 171–199.

(2) Ishihara, T., Oh, S., Tokuyama, Y., 2011. Numerical study on flow fields of tornado-like vortices using the LES turbulence model. J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 99, 239–248.

(3) Lewellen, D.C., Lewellen, W.S., 2007. Near-surface intensification of tornado vortices. J. Atmos. Sci. 64, 2176–2194.

(4) Liu, Z., Ishihara, T., 2015. Numerical study of turbulent flow fields and the similarity of tornado vortices using large-eddy simulations. J. Wind Eng. Ind. Aerodyn., 145 (2015), pp. 42-60

(5) Rott, N., 1958. On the viscous core of a line vortex. Z. für Angew. Math. Phys. 9 (5–6), 543–553.

