

残差に基づく有限要素法の数値解補正法に関する考察

筑波大学大学院システム情報工学研究群 学生会員 ○于 懐智

筑波大学システム情報系 正会員 山本 亨輔

1. 研究背景

固体や流体を取り扱う工学問題に多くで、有限要素法は最も一般的な数値解法の一つである。有限要素法にもいくつか種類があるが、最も汎用性が高いのは重み付き残差法である。しかし、重み付き残差法では、任意の重み関数に対して、重み付き残差の平均が常にゼロ、という条件式から数値解が算出されており、必ずしも残差を最小化しているわけではない。

そこで、本研究では移流方程式を例として、数値解と解析解の残差を比較し、数値解の高精度化の可能性について考察する。

2. 重み付き残差法と残差式

移流方程式は、以下の式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

ここで、解 $u(t, x)$ に基底 $\mathbf{N}(x)$ 、数値解 $\mathbf{u}(t)$ で表される近似解として $u = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}$ を代入する。この時の残差を $\mathbf{R}(t, x)$ とし、残差方程式を以下のように定義する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{R} \quad (2)$$

重み関数 $\omega(t, x)$ を用いて重み付き残差 $\omega \mathbf{R}$ を定義し、定義領域全体で重み付き残差平均がゼロであるという条件式を作ると、以下のようになる。

$$\int_0^L \omega \mathbf{R} dx = 0 \quad (3)$$

次に、 $\mathbf{M} = \left[\int_0^L \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx \right]$ 、 $\mathbf{C} = \left[\int_0^L c \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} dx \right]$ とお

き、重み関数も離散化 ($\omega = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}$) すると、任意の $\boldsymbol{\omega}$ に対して、常に式(3)が成立する(重み付き残差平均がゼロとなる)条件式は、

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4)$$

となる。この式は、必ずしも残差 $\mathbf{R}$ を最小化しているわけではなく、重み付き残差の最小化であると言える。離散点における残差は

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{N}^T \mathbf{u} \quad (5)$$

で与えられる。 $\mathbf{u}$ として近似解・解析解を与えて、結果を比較する。

3. 数値計算モデル

基底 $\mathbf{N}(x)$ には Hermite 基底^[1]を用いる。数値計算の諸元^[2]は表-1 に示す。

表-1 計算条件

c : 移流速度	1.00
L : 計算領域	$0 \leq x \leq 1$
T : 時間領域	4.00
Δx : 空間刻み幅	0.0050
Δt : 時間刻み幅	0.0001

4. 結果と考察

数値計算の結果を図-1 に示す。図-1(a)は、重み付き残差法による計算結果、図-1(b)は、節点における解析解の値を数値解の代わりに代入した時の結果を表している。図-1(c), (d)は、数値解・解析解を残差式(式(5))にそれぞれ代入した時の結果を表す。

一般に Hermite 基底は Lagrange 基底よりも精度は良いものの、重み付き残差法で求めた数値解には数値振動やなまりが確認できた。図-1(a)に示すように時間が経つにつれて、残差のピーク最大値や振動は改善するが、なまりが生じて精度は低下していく。これは、後退差分法による数値計算上の粘性が働くためと考えられる。この時の残差は、図-1(c)から、最初、全体に振動するように分布していたの

キーワード 有限要素法, Hermite 基底関数, 残差, 最適化

連絡先 〒305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1

が、数値粘性が働いた後では不連続面付近のピークとなることから分かる。一方、図-1(d)から、同時刻における解析解の残差を確認すると、いずれの時間帯でも不連続面に稀にピークが生じることがあるものの、基本的には全領域でゼロとなることを確認した。

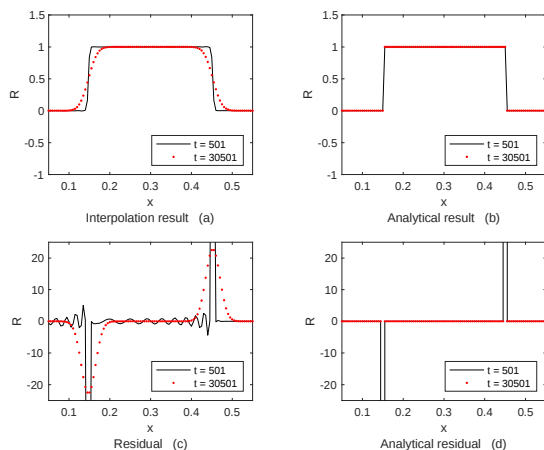


図-1 数値解と解析解およびそれぞれの残差

5. 最適化手法

FEM 結果は、数値解 $\mathbf{u}$ を $\mathbf{R}$ に基づいて、解析解に近付ける余地があることを示している。よって、 $\mathbf{R}$ を目的関数として、 $\mathbf{u}$ の補正を考える。

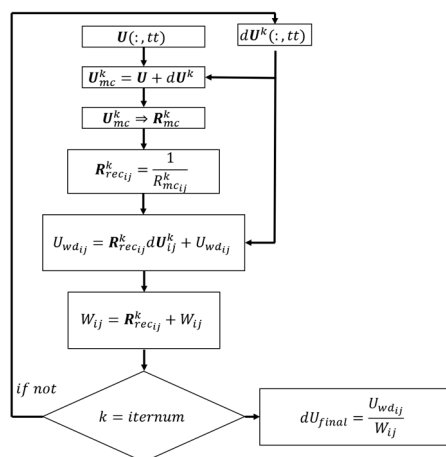


図-2 モンテカルロ法による修正アルゴリズム

まず、 $\mathbf{u}$ から作るデータ行列 $\mathbf{U}$ を定義する。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(\Delta t) & \mathbf{u}(2\Delta t) & \cdots & \mathbf{u}(T) \end{bmatrix} \quad (6)$$

k 個目の補正值 $d\mathbf{U}_{ij}^k$ は、 $[-0.5, 0.5]$ の一樣乱数とする。

$$\mathbf{U}_{mc}^k = \mathbf{U} + d\mathbf{U}^k \quad (7)$$

補正後データ行列 $\mathbf{U}_{mc}^k$ を残差式に代入すると、 $\mathbf{R}_{mc}^k$ が得られる。 $\mathbf{R}_{mcij}^k$ を目的関数として絶対値が最小とな

る $d\mathbf{U}$ 行列を探索するため、図-2のように $\mathbf{R}_{mcij}^k$ の逆数を $d\mathbf{U}_{ij}^k$ の重みとして、 $\mathbf{U}_{wd}$ を算出する。 $\mathbf{U}_{wdij}$ を合計重み $\mathbf{W}_{ij}$ で割って、最適補正值 $d\mathbf{U}_{final}$ を得る。式(8)に基づいて最適化後データ行列 $\mathbf{U}_{final}$ が得られる。

$$\mathbf{U}_{final} = \mathbf{U} + d\mathbf{U}_{final} \quad (8)$$

6. 残差最適化について考察とまとめ

本稿では、ある時刻($t = 0.0501$)の数値解に対する最適化を行う。モンテカルロ修正アルゴリズムに基づき、最適化粒子数を $k=10^3, 10^6, 10^9$ とした時のそれぞれの修正結果を図-3に示す。図より、最適化粒子数は多い程、精度が良いと分かった。つまり、残差に基づいて数値解をランダムに修正すれば、精度の改善が可能である。但し、本アルゴリズムでは、いくら繰り返し回数を上げてても、解析解のように残差が全領域でゼロとなる見込みは立たなかった為、今後はPSO法^[3]の適用など改善の余地がある。

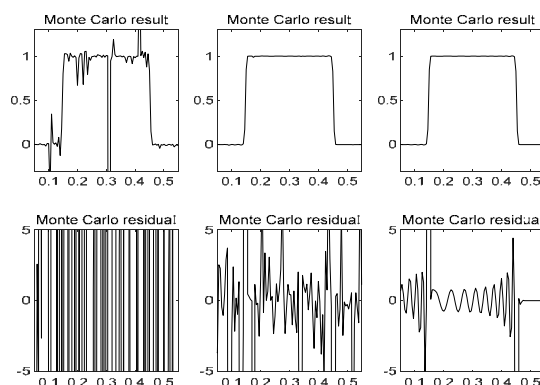


図-3 $t = 0.0501$ 時の数値解修正結果の比較
(左から右は $10^3, 10^6, 10^9$)

参考文献

- [1] 丸岡晃, 奥村弘: 高精度流体解析のための Hermite 型要素を用いた特性有限要素法の開発, 土木学会第 63 回年次学術講演会, CS08-21, pp.363-364, 2020.
- [2] 松浦大志, 金川哲也, 山本亨輔: Wavelet Taylor Galerkin 法による移流方程式の数値シミュレーション, 第 31 回数値流体力学シンポジウム, 京都, 2017.
- [3] 村上翔, 山本亨輔: 粒子群最適化に基づく複数車両の振動データを用いた車両・橋梁・路面のパラメータ同定, 土木学会全国大会第 74 回年次学術講演会, I-187(pp.123-124), 香川, 2019.