Hermite 基底を用いた有限要素法による移流方程式と Euler 方程式の数値計算

筑波大学システム情報工学研究科　学生会員　○須藤大樹
筑波大学システム情報系　正会員　山本亨輔

1. 研究背景

力学分野における数値シミュレーションの多くは，支配方程式と呼ばれる偏微分方程式の解を離散的に求めることで実現される．有限要素法もその一種である．この手法は，微分方程式の定義領域を微小な要素で分割し，基底関数を用いて解の近似表現を代入して，数値解を求める．最も一般的な基底は，折れ線近似に相当する一次 Lagrange 多項式であるが，精度や安定性を改善するために職人的工夫が必要となる．一方，折れ線近似をスプライン近似に置き換えると，三次 Hermite 基底となる．Hermite 基底は高次基底であるため，精度や安定性に優れると期待される．そこで，本研究では，移流方程式と Euler 方程式を例題に，一次 Lagrange 基底と三次 Hermite 基底の計算精度を夫々算出し，比較する．

2. 移流方程式の数値計算モデル

移流方程式は，物理量が移動する様子を表す偏微分方程式の一種である．解$u(x,t)$に関する移流方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

である．cは移流速度を表す．この偏微分方程式に重み付き残差法を適用し，上述の 2 種類の基底を用いて別々に離散化する．パラメータは**表-1** に示す．境界条件は周期境界とした．

表-1　計算条件

計算領域	$0 \le x \le 1$
要素数 n	200
空間刻み幅 Δx	0.005
時間刻み幅 Δt	0.0001
移流速度 c	1
時間微分	後退差分法

Keywords: CFD, FEM, Hermite Basis, Euler Equation
〒305-8573　茨城県つくば市天王台 1-1-1　筑波大学
e-mail：daiki.rikujou@icloud.com

3．移流方程式の検証と考察

以上の計算条件において，Lagrange 基底と Hermite 基底を用いて数値計算を行った結果をそれぞれ**図-1**，**図-2** に示す．

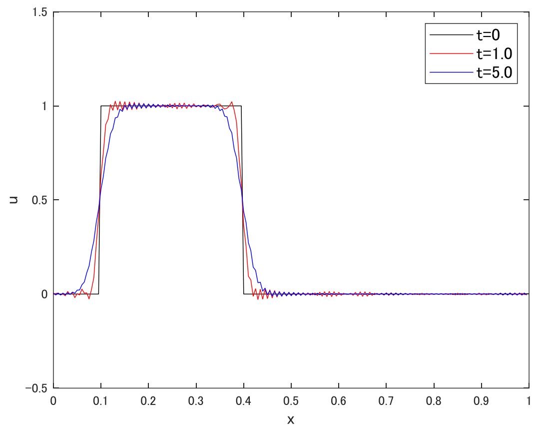

図-1　Lagrange 基底を用いた移流方程式の数値計算

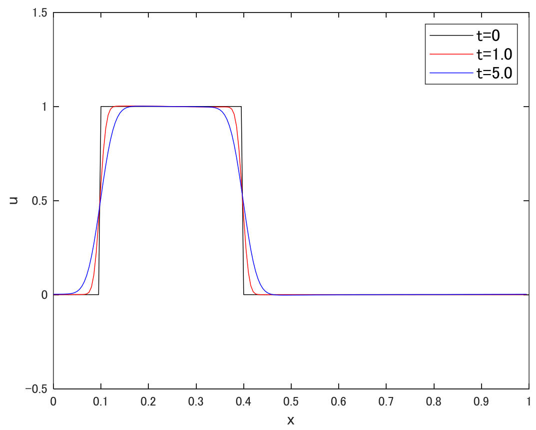

図-2　Hermite 基底を用いた移流方程式の数値計算

図-1 から，Lagrange 基底を用いた場合，数値振動の発生が確認できる．一方，**図-2** より，Hermite 基底を用いた場合は，数値振動が抑制されていることが分かる．なお，空間分解能を様々に変化させたケースや節点間隔を不均一にしたケースでも検証を行ったが，常に Lagrange 基底より Hermite 基底の方が精度に優れることを確認している．これらの結果は既往の研究成果

とも一致する[1].

4. Euler 方程式の数値計算モデル

非粘性圧縮性流体の運動方程式は，Euler 方程式[2]と呼ばれる．Euler 方程式は質量・運動量・エネルギー保存則を表す方程式を成分に持つ非線形偏微分方程式でもある．Euler 方程式は以下のように表される．

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+c\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}=0 \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{Q}$は保存量，$\boldsymbol{E}$は流束とよばれ，ρを流体の密度，uを流体の速度，pを流体の圧力とすると

$$\boldsymbol{Q}=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ e\end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{Bmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ (e+p)u\end{Bmatrix} \tag{4}$$

である．ただし，eは流体の単位体積当たりの全エネルギーであり，

$$e=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho u^2 \tag{5}$$

となる．γは比熱比を表す．

本稿では，1 次元衝撃波菅問題を検証に用いた．この問題では，管を二つに区切り，それぞれに熱力学的状態の異なる気体を充填し，瞬間的に仕切りを取り去った後の状態量を計算する．**表-2** に計算条件を示す．

表-2 計算条件

計算領域	$0\le x\le 1$
要素数 n	100
空間刻み幅 Δx	0.01
時間刻み幅 Δt	0.00001
仕切り板位置	0.500
初期圧力 p	1.000　0.100
初期密度 ρ	1.000　0.125
比熱比 γ	1.4
時間微分	後退差分法

5. Euler 方程式による検証と考察

表-2 の条件で Lagrange 基底と Hermite 基底を用いて数値計算した結果の内，$t=0.1$における流体密度ρとその理論解を**図-3**，**図-4** にそれぞれ示す．

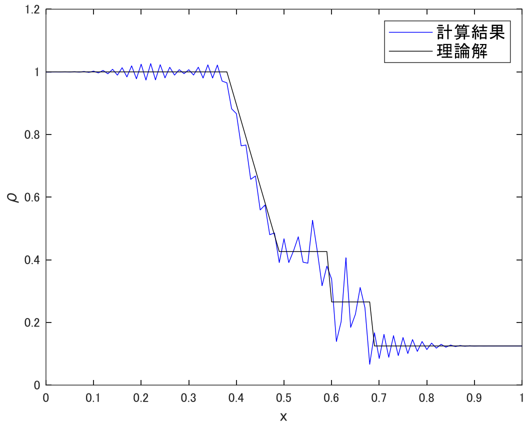

図-3　Lagrange 基底を用いた Euler 方程式の計算結果

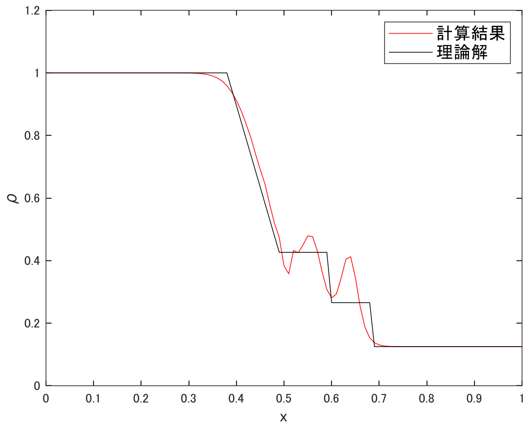

図-4　Hermite 基底を用いた Euler 方程式の計算結果

図-3，**図-4** を見比べると，移流方程式の場合と同様に，Lagrange 基底を用いた結果に比べて，Hermite 基底を用いた結果の方が，数値振動が抑えられているように見える．また，数値解の発散に対しても，Hermite 基底の方が安定性が高く，総じて Hermite 基底を用いた方が性能が良いと分かる．ただ，両者とも理論解とは誤差が大きく，高精度に計算するには何らかの補正操作が必要と言える．

参考文献

[1]　丸岡晃，奥村弘：高精度流体解析のための Hermite 型要素を用いた特性有限要素法の開発，土木学会第 63 回年次学術講演会概要集，CS08-21，pp.363-364，2008.

[2]　松浦大志：Wavelet Taylor Galerkin 法による　1 次元 Euler　方程式の数値計算，筑波大学修士論文，2020.