

地下水浸透流有限要素解析における揚水／注水の任意メッシュ対応点源モデル（その3）

清水建設 正 ○櫻井英行

1. はじめに

著者らは、有限要素法 (FEM) 浸透流解析において、ボーリング孔による揚水／注水（以降、注水）を点源列としてモデル化する場合の高精度で簡便な方法を提案してきた^{1)4)ほか}。FEM の最大の利点である任意分割三次元メッシュに適用可能なモデルである。点源に連結する要素の透水係数の補正だけなので、既存プログラムへの実装が容易なだけでなく、商用プログラムを用いた解析の前後処理として利用可能な実用性の高い方法である。これまでのモデルは孔近傍の理論解を応用していたが、本稿では、理論解の代わりに電荷重畳法を応用したモデルを示す。これまでの直線状の点源列だけでなく、曲線状の点源列にも応用可能な柔軟な方法である。以降、モデルの数理と計算方法の概要、並びに数値実験による精度の検証を行った結果を示す。

2. 節点流量

三次元定常浸透流問題を考える。FEM における各要素の方程式は次のように記述できる。

$$\sum_{j=1}^{N^e} (C_{ij}^e \phi_j^e) + q_i^e = 0, \quad i=1,2,\dots,N^e, \quad j=1,2,\dots,N^e \quad (1)$$

ここで、 e は要素に関するインデックス、 C_{ij}^e 、 N^e 、 ϕ_j^e 、 q_i^e はそれぞれ要素 e の係数行列、構成節点数、構成節点 j の水頭値、構成節点 i の流量値である。

以下、一つ以上の点源を構成節点に持つ要素を「連結要素」、連結要素の点源以外の構成節点を「至近節点」と呼ぶ（図-1 参照）。ある連結要素の構成節点のうち、節点 w が点源に対応しており、関数値 $\hat{\phi}_w$ が与えられるとする。透水係数は要素内一定の k^e とし、点源 w からその至近節点群までの距離に大差はないとみなして、要素係数行列の性質を利用すると次式を得る。

$$k^e c_{ww}^e (\bar{\phi}_w^{\text{adj}} - \hat{\phi}_w) = q_w^e \quad (2)$$

ここで、 $\bar{\phi}_w^{\text{adj}}$ は点源 w の至近節点群の平均的な関数値である。点源 w におけるフラックス Q_w は、点源 w に関する全連結要素の総和として記述できる。

$$Q_w^{\text{FEM}} = \sum_{e \in \mathbf{E}_w} q_w^e = (\bar{\phi}_w^{\text{adj}} - \hat{\phi}_w) \sum_{e \in \mathbf{E}_w} (k^e c_{ww}^e) \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{E}_w は点源 w の連結要素の集合である。二つ以上の構成節点が点源となる場合も式(3)と同様の関係が得られるが、三つ以上の場合、一般的な線形要素では不適切な形状となり、実際には用いられない。

3. 電荷重畳法による透水係数補正

図 1 に示すパーカーで仕切られた注水区間近傍の流れ場を考え、それを注水区間中心軸に配置した負荷点

p_i を中心とする次の三次元基本解の重ね合わせで表す。

$$\phi \approx \frac{1}{4\pi k} \sum_i^{N_p} \left[q_i^{\text{chg}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)^{-1} \right] \quad (4)$$

ここで、 N_p は負荷点の個数、 q_i^{chg} は負荷点における流量、 \mathbf{x}_i は負荷点の位置座標である。

境界条件として次式を導入する。

$$\phi = \hat{\phi}^{\text{bore}} \quad \text{on} \quad r_i = r^{\text{bore}} \quad (5)$$

$$\phi = (\bar{\phi}_w^{\text{adj}})_i \quad \text{on} \quad r_i = (\bar{r}_w^{\text{adj}})_i \quad (6)$$

r_i は負荷点を中心とする円筒座標系の動径座標である。 r^{bore} は孔半径、 $(\bar{r}_w^{\text{adj}})_i$ は負荷点に最も近い点源 w とその至近節点群との平均動径距離である。 $(\bar{\phi}_w^{\text{adj}})_i$ は式(3)に用いた至近節点群の平均的な水頭値である。これらの境界条件を式(4)に用いると次式を得ることができる。

$$\{\Theta\} = 4\pi k [G]^{-1} \{\Phi\} \quad (7)$$

$$\Phi_j = (\bar{\phi}_w^{\text{adj}})_j - \hat{\phi}^{\text{bore}} \quad (8)$$

$$\Theta_j = q_j^{\text{chg}} \quad (9)$$

$$G_{ij} = \left(\|\mathbf{x}_j^{\text{bore}} - \mathbf{x}_i\|^{-1} - \|\mathbf{x}_j^{\text{adj}} - \mathbf{x}_i\|^{-1} \right) \quad (10)$$

点源 w の流量をその近傍の負荷点 p_i の流量和で表す。

$$Q_w^{\text{chg}} = \sum_{i \in \mathbf{P}_w} q_i^{\text{chg}} = 4\pi k \sum_{i \in \mathbf{P}_w} \sum_{j=1}^{N_p} G_{ij}^{-1} \Phi_j \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{P}_w は、点源となる節点群のうち、点源 w が最も近い点源となる負荷点の集合である（図 1）。

さらに、次のように近似する。

$$Q_w^{\text{chg}} = 4\pi k (\bar{\phi}_w^{\text{adj}} - \hat{\phi}_w) \sum_{i \in \mathbf{P}_w} \sum_{j=1}^{N_p} G_{ij}^{-1} \quad (12)$$

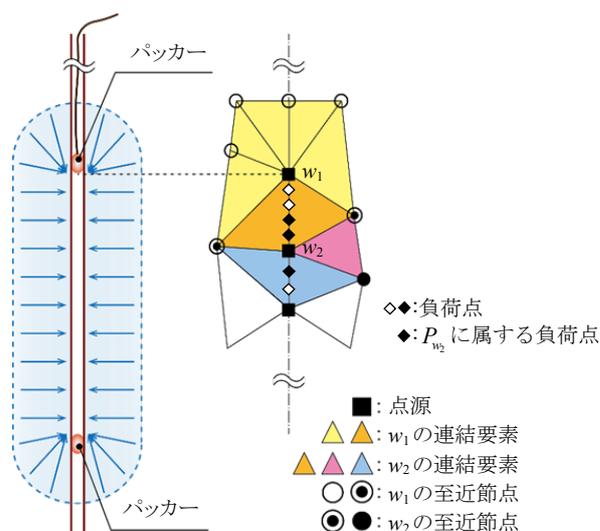


図 1 揚水区間近傍のメッシュと用語の定義

キーワード：浸透流解析，有限要素法，点源，任意メッシュ，非構造格子，電荷重畳法

連絡先：〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17 清水建設（株）技術研究所 TEL(090)2730-2855

式(12)が式(3)に等しいとおき、点源 w の連結要素群の透水係数は等しいとして、式(3)の k^e の代わりに \tilde{k}_w^e を、式(12)の k の代わりに k^e 用いると、次のようになる。

$$\tilde{k}_w^e = B_w k^e, \quad B_w = 4\pi \left(\sum_{i \in E_w} \sum_{j=1}^{N_{E_i}} G_{ij}^{-1} \right) \left(\sum_{e \in E_w} c_w^e \right)^{-1} \quad (13)$$

\tilde{k}_w^e は揚水区間至近の流動場を表現しうるように補正した点源 w の連結要素の透水係数、 B_w はその補正係数に対応する。

5. 数値実験による検証

図2に示すような領域の中心に孔径100mm、水頭値100m、区間長10mの注水区間が存在する円筒領域の問題により、本モデルの検証を実施した。上部境界面には、圧力規定で動水勾配を与えている。軸対称問題ではあるが、三次元任意メッシュでの検証を行うため、1/4を解析領域とした。注水は、図中に●で示す5節点に全水頭100mを与えて点源としてモデル化した。作為的にゆがめて分割した六面体メッシュAと注水区間から遠ざかるにつれて粗くなる四面体メッシュBの二つで検証した。正解に代わる参照解として、孔を径100mmの空洞としてモデル化し、壁面に水頭値100mを与えて、注水区間近傍を5mmで分割した非常に細かいメッシュによる軸対称解析の結果を用い、照査した。

図3と図4は、 $z=0$ を通る $r\theta$ 平面上での全水頭値の分布である。点源の連結要素の透水係数を補正した \times の本手法の結果は実線の参照解と良い一致を示している。一方、 \times の補正なしの結果は大きく外れていることが分かる。表1は注水流量の参照解との比である。補正ありの場合はいずれのメッシュでも1に近い値であるのに対し、補正なしの結果は2倍近い値となっている。なお、メッシュAと同じ節点配置の三角柱メッシュの検証も実施しており、同様の結果を得ている。

6. おわりに

FEM 浸透流解析において、ボーリング孔による注水を点源としてモデル化するための電荷重畳法を応用した任意メッシュ対応のモデルを提案し、その有効性を示した。本手法は、点源の連結要素の透水係数を補正するだけなので、商用コードを用いた解析にも適用可能な実用性の高いモデルである。

参考文献

- 1) 山田ら:有限要素法を用いた浸透流解析における注水・揚水孔の実用的な簡易モデル, 土木学会論文集 C-71-4, 407-417, 2015.
- 2) 櫻井・山田:地下水浸透流有限要素解析における揚水/注水の任意メッシュ対応点源モデル, 土木学会会第73回年次学術講演会 CS7-026, 51-52, 2018.
- 3) 櫻井・山田:地下水浸透流有限要素解析における揚水/注水の任意メッシュ対応点源モデル(その2), 土木学会第74回年次学術講演会 VII-159, 2019.
- 4) 櫻井・山田:浸透流解析に供する任意メッシュ対応点源モデル, 土木学会論文集 C-0496, 2020(搭載予定)

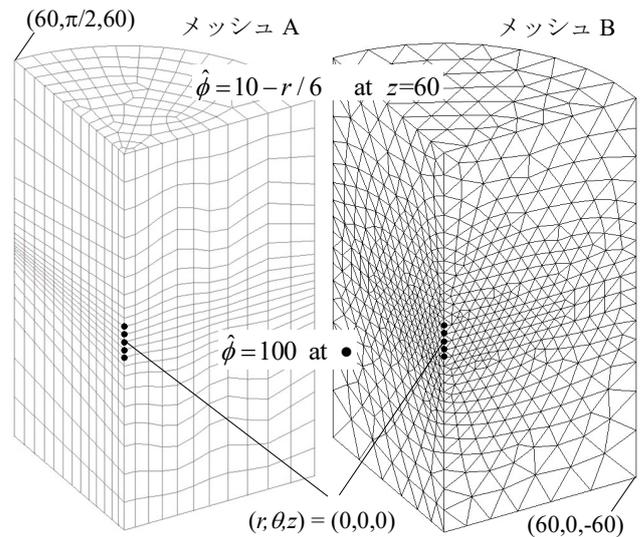


図2 検証問題 (単位: m)

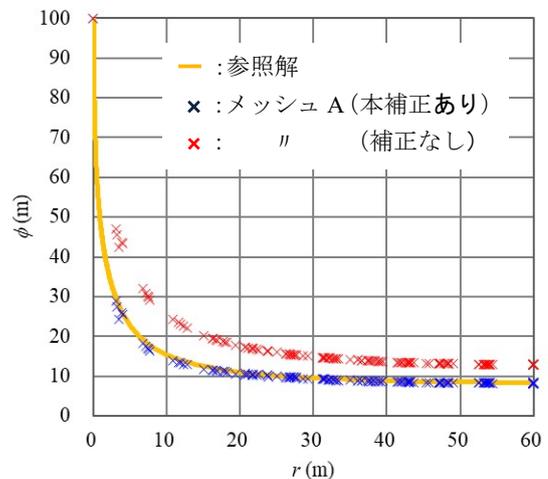


図3 メッシュAの全水頭分布 ($z=0$ の $r\theta$ 平面上)

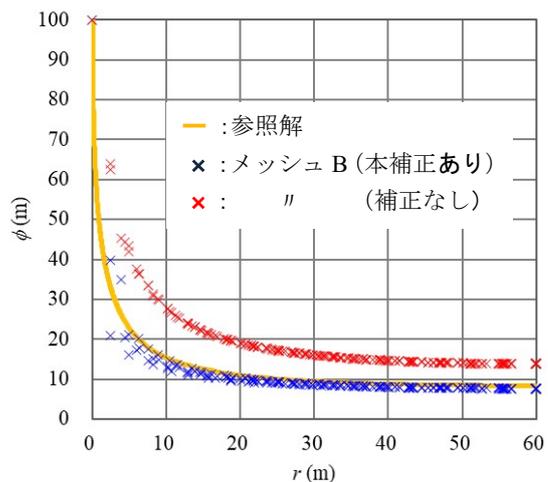


図4 メッシュBの全水頭分布 ($z=0$ の $r\theta$ 平面上)

表1 参照解との注水流量比

メッシュA		メッシュB	
本補正あり	補正なし	本補正あり	補正なし
0.98	1.88	0.88	2.06