

飽和・不飽和浸透流解析における非線形解析の収束性に関する数値実験

大成建設株式会社 原子力本部 原子力土木技術部

正会員 ○八木 啓介

大成建設株式会社 札幌支店 幌延地下施設共同企業体工事

正会員 小野 誠

1. はじめに

数値解析に求められる性能として解の精度、安定性、収束性、計算時間等が挙げられる。基本的には要素のサイズを小さくすると、各性能は向上するが計算時間は長くなる。実務では、これらを考慮し決められた条件下で目的を達成するために、合理的な解析モデルを作る必要がある。特に収束性の良し悪しについては、初期の段階では判断が難しく計算時間(工期)に与える影響が大きいので留意しなければならない。そこで、本検討は線形化手法に *Newton-Raphson* 法を適用した飽和・不飽和浸透流解析の収束性に着目した数値実験を実施したので報告する。

2. 飽和・不飽和浸透流解析¹⁾

有限要素法で離散化された支配方程式のマトリクス表示は(1)のようになる。(流入出項は省略)

$$[A_{ij}]\{\psi_j\} + [R_{ij}]\left\{\frac{d\psi_i}{dt}\right\} = \{Q_j\} - \{Z_j\} \quad (1)$$

ここで、 A : 要素マトリクス、 ψ : 節点圧力水頭(目的変数)、 R : 時間微分係数、 Q : 節点流量、 Z : 節点位置水頭である。この式には、飽和度 $S_w = f(\psi)$ 、比透水係数 $Kr = f(S_w)$ 、比水分容量 $C_s = f(S_w)$ の3つの非線形パラメータが含まれており、その関係式は飽和・不飽和浸透特性によって決定する。

本検証では、有限要素法による浸透流解析プログラム「Dtransu3D(Ver.2.0b)」を用いた。

3. 線形化手法²⁾

浸透流解析で一般的に適用される線形化手法として *Picard* 法と *Newton-Raphson* 法(以下、*NR* 法とする)がある。*Picard* 法は反復計算 1 ステップ前の圧力水頭を仮値とし非線形パラメータを決定する。それを含む係数マトリクス、ベクトルを構築し、解いて得られた圧力水頭が仮値と収束閾値以下で一致するまで反復計算を繰り返す。*NR* 法は、残差ベクトルとその傾きから圧力水頭の増分値を決定する方法である。残差ベクトルは(2)のように示される。

$$\{F_i\} = [A_{ij}]\{\psi_i\} + [R_{ij}]\left\{\frac{d\psi_i}{dt}\right\} - \{Q_j\} + \{Z_j\} = 0 \quad (2)$$

これに高次の項を無視したテイラー展開を適用すると圧力水頭は(3)のように表すことができる。

$$\{\psi_i^n\} = \{\psi_i^{n-1}\} - \left[\frac{\partial F_i}{\partial \psi}\right]_n^{-1} \{F_i^n\} \quad (3)$$

ここで、 n は反復回数であり現在の反復ステップの圧力水頭 ψ^n と反復 1 ステップ前の圧力水頭 ψ^{n-1} が収束閾値以下で一致するまで反復計算を繰り返す。(3)に含まれる $\partial F/\partial \psi$ は接線剛性マトリクスと呼ばれ、ここでは(4)のように数値微分で計算する。

$$J_{ij} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial \psi_j}\right] \approx \frac{F_i(\dots \psi_{j-1}, \psi + \Delta\psi_j, \psi_{j+1} \dots) - F_i(\dots \psi_{j-1}, \psi_j, \psi_{j+1} \dots)}{\Delta\psi_j} \quad (4)$$

ここで、 $\Delta\psi_j = \psi_j \cdot \delta$ で δ は任意で決定するパラメータである。Dtransu3D(Ver.2.0b)では、線形化手法に *Picard* 法が適用されているため、プログラムを一部追編集し *NR* 法を追加した。

4. 一次元準解析解との比較

NR 法を追加したプログラムを確認するために1次元準解析解と比較した。準解析解には *ConnectFlow* の検証³⁾で用いられた問題を参考にモデルを作成した。本検証で用いた解析モデルを図1に示す。この問題は解析領域全体の初期状態を圧力水頭-1,100(m)とし両端に、圧力水頭-1,000(m)を固定した非定常非線形解析である。収束閾値は各節点の圧力水頭変化量 ($\varepsilon = |\psi^n - \psi^{n-1}|$) の最大値が 10^{-12} 以下、時間刻み幅 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-5} \text{sec}$ 一定とした。準解析解は領域内の飽和変化率が小さいと仮定し線形問題として近似したものである。詳細については紙面の都合上省略するがの参考文献³⁾を参照されたい。図2に解析結果を示す。*Picard* 法と *NR* 法の解は収束閾値以上で一致した。解析結果は経過時間 $1.0 \times 10^7 \text{sec}$, $2.0 \times 10^7 \text{sec}$, $3.0 \times 10^7 \text{sec}$ のものである。 $3.0 \times 10^7 \text{sec}$ で解析領域中央

キーワード 飽和・不飽和浸透流解析, 非線形解析, *Newton-Raphson* 法

連絡先 〒163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1 新宿センタービル 大成建設原子力本部 TEL 03-5381-5315

($L=25.0\text{m}$)における準解析解との誤差は0.24%であった。経過時間増加に伴い誤差が大きくなるのは準解析解が線形で近似しているためであり参考文献³⁾でも同様の傾向にある。これらよりプログラムにNR法は正しく追加されていると考えられる。

5. 数値実験

飽和・不飽和浸透流解析における非線形解の収束性を確認するために図3に示す解析モデルを用いた数値実験を行った。図4に節点($Z=1$)の残差と圧力水頭の分布図を示す。この解析では反復計算を100回繰り返しても収束しなかった。図4内に反復計算中に得られた圧力水頭と残差を反復回数別にプロットした。図内 n は反復回数であり、 n が2回以降は同じ経路をループしていることがわかる。この原因として圧力水頭が0を境に残差が不連続的な挙動を示すこと、また圧力水頭0以上のとき残差の傾きが一定になるためNR法のメカニズム上、圧力水頭が0以上になる反復計算では収束性が低下したためと考えられる。これは圧力水頭が0以上のとき、浸透流解析の非線形パラメータは一定になるという特徴に起因するものである。このような収束しない問題を解決する方法の一つとして圧力水頭を更新する際に圧力水頭の変化量を制御して計算する方法がある⁴⁾。これを参考に(5)に示す方法で圧力水頭を更新する。 w は重みで $0 < w \leq 1$ の値を取る。

$$\{\psi_i^n\} = \{\psi_i^{n-1}\} - w \left[\frac{\partial F}{\partial \psi} \right]_n^{-1} \{F_i^n\} \tag{5}$$

$w=0.5$ とした(5)を用いて再解析した残差分布図を図5に示す。この解析では39回の反復計算で収束した。ただし、この方法は圧力水頭の変化量が小さくなるため収束値付近の計算では反復回数が増加することに留意する必要がある。

6. まとめ

飽和・不飽和浸透流解析では非線形パラメータが圧力水頭0以上で一定という特徴がある。そのため残差は圧力水頭0を境に不連続的な挙動になり0以上は傾きが一定になる。これが原因で収束性が低下するケースがあることを確認した。収束しない問題については、変化量を小さくすることで解決することがあるが、反復回数は増加する。本検証は単純な条件のモデルでの結果であるため、3次元や非構造要素といった条件での検証を引き続き行う予定である。

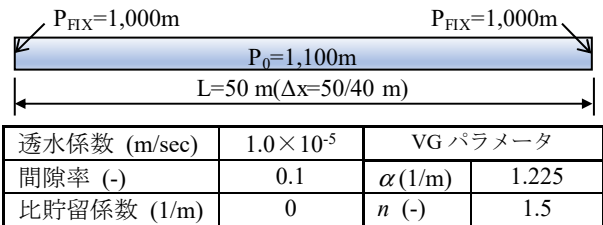


図1 解析モデル（準解析解比較）

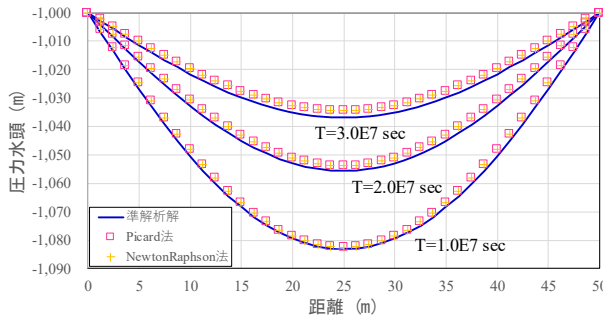


図2 解析結果

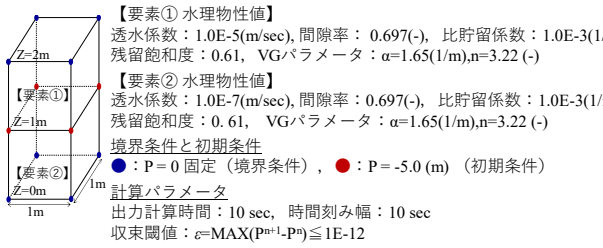


図3 解析モデル（数値実験）

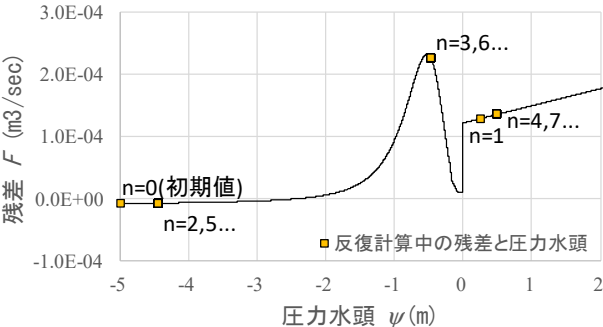


図4 残差分布図

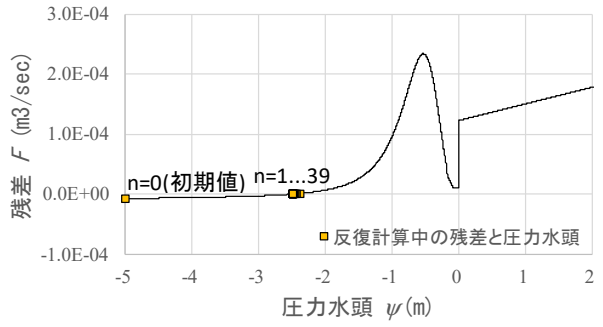


図5 残差分布図（圧力更新時重みあり）

参考文献(1)日本地下水学会(2010):地下水シミュレーション, 技報堂出版, p45,p131(2)ライナーヘルミックほか(2004): 地下環境での多相流と輸送現象, シュプリング・フェアラーク東京, pp120-121(3)wood(2019):ConnectFlow Verification, pp.27-30,http://www.connectflow.com/resources/docs/conflow_verification.pdf, 2020/3/31(4)Richard G etc(2011):MODFLOW-NWT,A Newton Formulation for MODFLOW-2005,p.11,https:// pubs.usgs.gov/tm/tm6a37/pdf/tm6a37.pdf,2020/3/31